TER : Le théorème de Morera revisité (sujet 10, proposé par Alain Yger)

Reglade Stéphanie, Pierre Fabien, Bouyrie Raphaël

Remerciements

Nous tenons à remercier Alain Yger pour sa disponibilité et son aide qui nous ont permis de mener à bien notre travail.

Table des matières

Introduction

Le but de ce TER est dans un premier temps de démontrer la nouvelle propriété des fonctions harmoniques de Jean Delsarte à savoir : *soit f une fonction continue, définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, vérifiant la propriété de la moyenne pour deux rayons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ (tels que le quotient des deux rayons ne soit pas le quotient de deux zéros distincts de la fonction J_0 de Bessel), est harmonique*. En fonction des hypothèses sur la fonction f, on va procéder de deux façons différentes ; si elle définit une distribution tempérée, en utilisant directement la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, et dans l'autre cas nous nous affranchirons de cette clause restrictive grâce à la formule de Cauchy qui permet d'exprimer l'opérateur laplacien comme combinaison linéaire de convolées de distributions à support compact.

Dans un deuxième temps, on présentera une version plus forte de théorème de Morera, *une fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si est seulement si l'intégrale sur le bord d'*un *triangle ainsi que de toutes ses images par déplacement (i.e composé d'une translations et d'une rotation) est nulle*, mais nous ne la démontrerons que dans le cadre où la fonction f définit une distribution tempérée, le cadre général nécéssitant plus de connaissances sur les fonctions holomorphes de plusieurs variables.

1 Propriété de la moyenne et harmonicité.

1.1 Mise en équation du problème :

Soit f une fonction continue, définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ [1], vérifiant la propriété de la moyenne pour deux rayons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ (tels que le quotient des deux rayons ne soit pas le quotient de deux zéros distincts de la fonction J_0 de Bessel), c'est-à-dire, pour $j = 1, 2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_{\sqrt{u^2+v^2}=r_j} f(x+u, y+v) d\sigma_{r_j}, \tag{1}$$

où σ_{r_j} désigne la mesure linéique (normalisée, de masse totale égale à 1) correspondant au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r_j. Alors f est harmonique.

Il s'agit d'un résultat de Jean Delsarte.

Rappelons que la définition de l'opération de convolution entre une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (supposée localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dX sur $\mathbb{R}^n$) et une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ (à support compact) est définie dX presque partout sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(f * \mu)(X) = (\mu * f)(X) = \int_{\mathbb{R}^n} f(X - Y) d\mu(Y).$$

Cette définition est licite (au sens des distributions) puisque l'intégrale figurant au membre de gauche est convergente pour Lebesgue presque tout X et définit une fonction localement intégrable : en effet, pour tout compact L de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
& \int_L \Big(\int_{\mathrm{Supp}\,(\mu)} |f(X-Y)|\, d|\mu|(Y) \Big) dX \\
= & \int_{\mathrm{Supp}\,(\mu)} \Big(\int_{X-Y} |f(X-Y)|\, dX \Big)\, d|\mu|(Y) \\
\leq & \ \|\mu\| \int_{L - \mathrm{Supp}\,\mu} |f(Z)|\, dZ < +\infty\,,
\end{aligned}$$

où $L - \mathrm{Supp}\,(\mu) := \{X - Y\,;\, X \in L\,,\, Y \in \mathrm{Supp}\,\mu\}$ et

$$\|\mu\| := \sup_{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu \Big|$$

désigne la masse totale de la mesure μ. Ici pour nous, $n = 2$.

[1] Dans ce TER, on identifiera $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$.

On peut également définir la convolution entre un opérateur différentiel à coefficients constants $\partial_u = P(D)(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ (assimilé à $P(D)[\delta_{(0,...,0)}]$) et une fonction C^∞ $f \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, en posant :

$$(\partial_u * f)(X) = (\partial_u[\delta_{(0,\ldots,0)}] * f)(X) = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_u f]\,(X-Y) d\delta_{(0,\ldots,0)}(Y) = [\partial_u f](X).$$

Ceci reste valable au sens des distributions si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Dans le cas particulier $n = 2$ et $\partial_u = \Delta_{(x,y)} = \partial_x^2 + \partial_y^2$, on obtient :

$$\Delta f = \Delta_{(x,y)}[\delta_{(0,0)}] * f.$$

Quitte à régulariser le problème posé par convolution, c'est-à-dire à régulariser f par un élément de la suite $(f * \omega_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, où $(\omega_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité, on peut se ramener à supposer, grâce à l'associativité du produit de convolution, que f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, en utilisant la convolution, le problème de Delsarte posé au premier paragraphe se ramène à montrer que, si f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$:

$$\Big((\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_1}) * f = (\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_2}) * f = 0\Big) \Rightarrow \Delta f = 0,$$

où $\delta_{(0,0)}$ désigne la mesure de Dirac en $(0, 0)$.

On va utiliser la transformée de Fourier des distributions tempérées pour ramener l'opération de convolution à celle de multiplication. Par définition, la transformée de Fourier d'une mesure μ sur $\mathbb{R}^2$ et à support compact est la distribution tempérée correspondant à la fonction de deux variables :

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \widehat{\mu}(\omega_1, \omega_2) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\mu(x, y)$$

On obtient immédiatement : $\widehat{\delta_{(0,0)}} \equiv e^0 \equiv 1$.

Calculons la transformée de Fourier de la distribution à support compact $\Delta_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$.

On a, en utilisant la dérivation des distributions :

$$\begin{aligned} < \Delta[\delta_0], \varphi > &= < \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta_0, \varphi > \\ &= < \delta_0, \Delta\varphi > \\ &= \Delta\varphi(0) \end{aligned}$$

Comme $\Delta[\delta_0]$ est une distribution à support compact , sa transformée de Fourier est définie par :

$$\widehat{\Delta[\delta_0]}(\omega) =< \Delta[\delta_0], e^{-i<\omega,t>} >= -||\omega||_2^2$$

On peut aussi l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \langle \Delta[\widehat{\delta_{(x=0,y=0)}}], \varphi \rangle &= \langle \delta_{(x=0,y=0)}, \Delta \widehat{\varphi} \rangle \\
&= -\Big\langle \delta_{(x=0,y=0)}, (\omega_1^2 + \omega_2^2)\widehat{\varphi} \Big\rangle \\
&= -({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \, dxdy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2)\varphi \, dxdy \\
&= \Big\langle [-({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2)], \varphi \Big\rangle.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi que la transformée de Fourier du laplacien est la distribution tempérée correspondant à la fonction en $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ égale à l'opposée du carré de la norme euclidienne.

Lemme 1.1.1. *La transformée de Fourier d'une convolution entre une mesure à support compact μ et une fonction localement intégrable f induisant une distribution tempérée est égale au produit des transformées de Fourier $\widehat{\mu}\,\widehat{f}$, où $\widehat{\mu}$ désigne la fonction*

$$\omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \mu, e^{-i\langle \omega, \cdot \rangle} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{j=1}^n \omega_j x_j} \, d\mu(X).$$

Comme dans le cadre des fonctions intégrables, la transformée de Fourier transforme ici le produit de convolution $\mu * f$ en le produit des transformées de Fourier (entendues ici au sens des distributions) $\widehat{\mu}\,\widehat{f}$, ce dernier produit étant à interpréter comme le produit de la distribution tempérée $\widehat{f}$ par la fonction C^∞ $\widehat{\mu}$.

Démonstration. On se contente ici du cas $n = 2$, qui sera notre cas par la suite. On démontre dans un premier temps le résultat en remplacant f par $f_T := f\chi_{B(0,T)}$, ce qui revient à supposer f localement intégrable et à support compact. Dans ce cas, $\mu * f_T$ est aussi à support compact et on a

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mu * f_T})(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_T(\xi - x, \eta - y) d\mu(\xi, \eta) \right) e^{-i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\xi d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_T(\xi - x, \eta - y) e^{-i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\xi d\eta \right) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_T(s, t) e^{-i(\omega_1(x+s) + \omega_2(y+t))} dsdt \right) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(i\omega_1 x + \omega_2 y)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_T(s, t) e^{-i(\omega_1 s + \omega_2 t)} dsdt \right) dxdy \\
&= \widehat{f_T}(\omega)\, \widehat{\mu}(\omega).
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini (passage de la ligne 1 à la ligne 2), la formule de changement de variable (passage de la ligne 2 à la ligne 3) et enfin la propriété algébrique de l'exponentielle (passage de la ligne 3 à la ligne 4). Comme f est supposée ici correspondre à une distribution tempérée, f est la limite (dans l'espace des distributions tempérées) de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers l'infini. De même $\mu * f$ est la limite de la suite $(\mu * f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et le lemme s'obtient à partir de la formule établie pour f_k en faisant tendre k vers l'infini et en utilisant la continuité de la transformation de Fourier comme application de l'espace des distributions tempérées dans lui-même. $\square$

Ainsi, lorsque f est supposée induire une distribution tempérée (ce qui n'est pas en général le cas), le problème revient à montrer (puisque la transformation de Fourier est injective) que

$$(1-\widehat{\sigma_{r_1}})\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) = (1-\widehat{\sigma_{r_2}})\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) = 0 \Rightarrow -(\omega_1^2+\omega_2^2)\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) = 0.$$

Nous allons établir dans la sous-section 2 suivante que ceci est vrai sous l'hypothèse faite sur les r_j. Nous allons dans la sous-section 3 développer une autre approche qui permettra de nous affranchir de la clause restrictive suivant laquelle f induit une distribution tempérée.

1.2 Calcul de la transformée de Fourier de σ_{r_j}

Les fonctions J_n de Bessel sont les fonctions entières définies par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall \zeta \in \mathbb{C}^*,\ \exp\Big(\frac{z}{2}(\zeta - 1/\zeta)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)\zeta^n.$$

En particulier, pour $\zeta = e^{i\theta}$, on obtient

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)e^{in\theta}.$$

Ainsi, les fonctions de Bessel d'ordre n sont les coefficients de Fourier de la fonction de gauche, donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz(\sin\theta - n\theta)}d\theta.$$

Paramétrisons le cercle de rayon r_j $(j=1,2)$: on prend $x = r_j\cos\theta$, $y = r_j\sin\theta$, et l'on exprime en utilisant ce paramétrage la transformée de Fourier de la mesure linéïque de Lebesgue normalisée σ_{r_j}, $j=1,2$:

$$\widehat{\sigma_{r_j}}(\omega_1,\omega_2) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\sigma_{r_j}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(r_j\omega_1\cos\theta + r_j\omega_2\sin\theta)}d\theta.$$

Lemme 1.2.1. *On a, pour tout* (ω_1, ω_2) *dans* $\mathbb{R}^2$*,*

$$\widehat{\sigma_{r_j}}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(r_j \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2} \sin\theta)} d\theta = J_0\Big(r_j \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\Big).$$

Démonstration. La preuve du lemme repose sur la formule

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(\omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\ sin\theta} d\theta. \tag{2}$$

Pour démontrer cette formule, on pose $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, et l'on a $|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Alors

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(\omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i|\omega| \sin(\theta+\phi)} d\theta,$$

où ϕ est tel que : $\cos\phi = \frac{\omega_2}{|\omega|}$ et $\sin\phi = \frac{\omega_1}{|\omega|}$. Mais

$$\int_0^{2\pi} e^{-i|\omega| \sin(\theta+\phi)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i|\omega| \sin\theta} d\theta$$

par invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur le $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. La formule (2) est établie et le lemme en résulte. □

Si l'on pose

$$\varphi_j(z) = 1 - J_0(r_j z),\ j = 1, 2,$$

on constate que ces deux fonctions entières n'ont par hypothèse que $z = 0$ comme zéro commun. Les fonctions

$$f_j(z) := \frac{\varphi_j(z)}{z^2}\ ,\ j = 1, 2,$$

définies *a priori* sur $\mathbb{C}^*$ ont une singularité éliminable en $z = 0$ et se prolongent en des fonctions entières (notées encore f_1 et f_2) à $\mathbb{C}$ tout entier : en effet la fonction J_0 de Bessel est une fonction entière paire valant 1 en 0. De plus, par dérivation sous le signe intégral, on obtient immédiatement :

$$J_0''(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = -\frac{1}{2},$$

ce qui prouve que f_1 et f_2 ne s'annulent pas en 0 et n'ont donc en fait aucun zéro commun dans $\mathbb{C}$.

Si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant (au sens des distributions)

$$(\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_j}) * f = 0\ ,\ j = 1, 2,$$

on a, en prenant les transformées de Fourier et en utilisant le lemme 1.1.1,

$$f_j\Big(\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\Big)\cdot\Big((\omega_1^2+\omega_2^2)\widehat{f}(\omega_1,\omega_2)\Big)=0$$

au sens des distributions. Comme les deux fonctions entières

$$(\omega_1,\omega_2)\mapsto f_j\Big(\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\Big)\,,\ j=1,2,$$

n'ont aucun zéro commun dans $\mathbb{C}$, on en déduit

$$(\omega_1^2+\omega_2^2)\widehat{f}(\omega_1,\omega_2)=-\widehat{\Delta(f)}(\omega_1,\omega_2)=0$$

au sens des distributions dans $\mathbb{R}^2$. La transformation de Fourier étant un isomorphisme de l'espace des distributions tempérées dans lui-même, on en déduit que $\Delta(f)=0$ au sens des distributions, donc que f admet un représentant C^∞ qui est une fonction harmonique. Ceci prouve (dans ce cas particulier) le résultat de Delsarte.

Le fait que ψ_1 et ψ_2 n'ont aucun zéro commun va nous permettre (dans la section suivante) d'écrire une formule de division *via* la formule de Cauchy et de nous affranchir de l'hypothèse suivant laquelle f induit une distribution tempérée dans le plan.

1.3 Formule de Cauchy et calcul de résidus.

On reprend les fonctions entières

$$f_j(z)=\frac{1-J_0(r_jz)}{z^2}=\frac{\varphi_j(z)}{z^2}\,,\ j=1,2,$$

introduites dans la section précédente (et sans zéro commun dans $\mathbb{C}$). Par la formule de Cauchy,

$$1=\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

si $|z|<R$. Alors, on obtient, si tous les zéros de f_1 et f_2 sont en dehors du cercle de rayon R, et pour tout z tel que $|z|<R$:

$$\begin{aligned}-1 &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta^7f_1(\zeta)f_2(\zeta)-z^7f_1(z)f_2(z)}{\zeta^7(z-\zeta)f_1(\zeta)f_2(\zeta)}d\zeta\\ &\quad+\frac{z^7f_1(z)f_2(z)}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^7(z-\zeta)f_1(\zeta)f_2(\zeta)}.\end{aligned}$$

Si $|z|>R$, le membre de gauche de cette formule est à remplacer par 0.

Fixons $|z|<R$ et posons $h_z(\zeta)=\dfrac{u_z(\zeta)}{v_z(\zeta)}$, où

$$u_z(\zeta)=\zeta^7f_1(\zeta)f_2(\zeta)-z^7f_1(z)f_2(z)\,,\ v_z(\zeta)=\zeta^7(z-\zeta)f_1(\zeta)f_2(\zeta).$$

On remarque que z est une singularité éliminable de h_z et que h_z est à pôles simples, sauf en zéro, de pôles (autres que 0) les zéros (tous simples) de $f_1 f_2$. Pour tout pôle simple $c \neq 0$ de h_z :

$$\text{Res}\,(h_z(\zeta)d\zeta, c) = \frac{u_z(c)}{v_z'(c)}.$$

On obtient donc :

$$\text{Res}(h_z(\zeta)d\zeta, c) = \frac{c^7 f_1(c) f_2(c) - z^7 f_1(z) f_2(z)}{(z-c)(c^7 f_1(c) f_2'(c) + c^7 f_1'(c) f_2(c) + 7c^6 f_1(c) f_2(c)) - c^7 f_1(c) f_2(c)}.$$

En un zéro a de f_1 :

$$\text{Res}\,(h_z(\zeta)d\zeta, a) = \frac{z^7 f_1(z) f_2(z)}{a^7 (a-z) f_1'(a) f_2(a)}.$$

En un zéro b de f_2 :

$$\text{Res}(h_z(\zeta)d\zeta, b) = \frac{z^7 f_1(z) f_2(z)}{b^7 (b-z) f_2'(b) f_1(b)}.$$

D'autre part 0 est un pôle d'ordre 7 de h_z. On a donc :

$$\text{Res}(h_z(\zeta)d\zeta, 0) = c_6(g_z),$$

avec :

$$h_z(\zeta) = \frac{g_z(\zeta)}{\zeta^7} = \frac{1}{\zeta^7} \frac{\zeta^7 f_1(\zeta) f_2(\zeta) - z^7 f_1(z) f_2(z)}{(z-\zeta) f_1(\zeta) f_2(\zeta)},$$

où $c_6(g_z)$ est le terme d'ordre 6 dans le développement en série de Laurent[2] de g_z. Utilisons pour calculer ce résidu en 0 la notation abrégée (en référence au calcul symbolique) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k := [c_0, c_1, c_2, c_3, ...].$$

Toujours par dérivation sous le signe intégral, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_0^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i \sin\theta)^n d\theta.$$

Cette quantité est nulle si $n = 2p+1$ et vaut pour $n = 2p$

$$J_0^{(2p)}(0) = \frac{(-1)^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2p}\theta d\theta = \frac{2(-1)^p}{\pi} W_{2p},$$

[2]Voir Amar Matheron - Analyse complexe : calcul pratique d'un résidu, page 241.

où W_{2p} désigne l'intégrale dite de Wallis[3] (ici d'indice $2p$). Ainsi, par développement de Taylor, on obtient :

$$J_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} z^{2p}$$

Remarquons (ce sera utile pour la suite) que ce développement en série montre que J_0 est solution de l'équation différentielle suivante (dite de Bessel) :

$$z^2y'' + zy' + z^2y = 0.$$

Avec les notations précédentes ($j = 1, 2$) :

$$\begin{aligned}
J_0(r_j\zeta) &= \Big[1, 0, -\frac{r_j^2}{4}, 0, \frac{r_j^4}{64}, 0, -\frac{r_j^6}{2304}, 0, ...\Big] \\
f_j(\zeta) &= \Big[\frac{r_j^2}{4}, 0, -\frac{r_j^4}{64}, 0, \frac{r_j^6}{2304}, 0, ...\Big] \\
f_1(\zeta)f_2(\zeta) &= \frac{r_1^2r_2^2}{16}\Big[1, 0, -\frac{r_1^2+r_2^2}{16}, 0, \frac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} + \frac{r_1^2r_2^2}{256}, 0...\Big]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_z(\zeta) &= \frac{r_1^2r_2^2}{16}\Big[-\frac{16z^7f_1(z)f_2(z)}{r_1^2r_2^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \\
&\quad -\frac{r_1^2+r_2^2}{16}, 0, \frac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} + \frac{r_1^2r_2^2}{256}, 0...\Big].
\end{aligned}$$

On cherche $[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ...]$ tel que :

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ...]\,((z-\zeta)f_1(\zeta)f_2(\zeta)) = u_z(\zeta).$$

Or on a

$$(z-\zeta)f_1(\zeta)f_2(\zeta) = \tfrac{r_1^2r_2^2}{16}\Big[1, 0, -\tfrac{r_1^2+r_2^2}{16}, 0, ...\Big](z-\zeta)$$
$$= \tfrac{r_1^2r_2^2}{16}\Big[z, -1, -z\tfrac{r_1^2+r_2^2}{16}, \tfrac{r_1^2+r_2^2}{16}, z\tfrac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} + z\tfrac{r_1^2r_2^2}{256}, -\tfrac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} - \tfrac{r_1^2r_2^2}{256}, ...\Big].$$

On cherche donc $[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ...]$ tel que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{r_1^2r_2^2}{16}[c_0, c_1, c_2, ...] \times \\
&\times\Big[z, -1, -z\tfrac{r_1^2+r_2^2}{16}, \tfrac{r_1^2+r_2^2}{16}, z\tfrac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} + z\tfrac{r_1^2r_2^2}{256}, -\tfrac{2(r_1^4+r_2^4)}{1027} - \tfrac{r_1^2r_2^2}{256}, ...\Big] \\
&= \Big[-z^6f_1(z)f_2(z), 0, 0, 0, 0, 0, 0, \tfrac{r_1^2r_2^2}{16}, 0, -\tfrac{r_1^4r_2^2}{256} - \tfrac{r_1^2r_2^4}{256}, ...\Big].
\end{aligned}$$

[3] « Calcul infinitésimal » de Dieudonné

D'où, en posant

$$A = \frac{r_1^2 + r_2^2}{16},\ B = \frac{2(r_1^4 + r_2^4)}{1027},\ C = \frac{r_1^2 r_2^2}{256},$$

il vient

$$\begin{array}{rcl} c_0 z & = & -z^7 f_1(z) f_2(z) \dfrac{16}{r_1^2 r_2^2} \\ c_1 z & = & c_0 \\ c_2 z & = & c_0 A + c_1 \\ & \dots & \end{array}$$

(ce jusqu'à c_6). Après calculs, on trouve : $c_6 = f_1(z) f_2(z) P_0(z)$, où P_0 est un polynôme de degré 6. Ainsi,

$$\mathrm{Res}(h_z(\zeta) d\zeta, 0) = f_1(z) f_2(z) P_0(z).$$

La formule de Cauchy se ramène donc, par la formule des résidus, à :

$$\begin{aligned} -1 = f_2(z) \sum_{\substack{f_1(a)=0 \\ |a|<R}} \frac{z^7 f_1(z)}{a^7 (z-a) f_1'(a) f_2(a)} + f_1(z) \sum_{\substack{f_2(b)=0 \\ |b|<R}} \frac{z^7 f_2(z)}{b^7 (z-b) f_2'(b) f_1(b)} \\ + f_1(z) f_2(z) P_0(z) + \frac{z^7 f_1(z) f_2(z)}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{d\zeta}{\zeta^7 (z-\zeta) f_1(\zeta) f_2(\zeta)}. \end{aligned} \tag{3}$$

On peut également remplacer le contour $|\zeta| = R$ par le support d'un lacet simple γ entourant l'origine ; la formule reste valable pour z intérieur au lacet, les sommes ne portant que sur les ensembles de pôles respectifs des fonctions f_1 et f_2 appartenant à cet intérieur.

1.4 Formule de division.

On va maintenant choisir une suite de lacets simples $(\gamma_n)_n$, γ_n étant une déformation du lacet $t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$ pour $n >> 1$, telle $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur le support de γ_n et que $I_{\gamma_n}(z) \to 0$ quand z est fixé et $n \to \infty$, où l'on a posé, pour $R > 0$ tel que $R > z$ et $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur le cercle $|\zeta| = R$,

$$I_R(z) = \int_{|\zeta|=R} \frac{d\zeta}{\zeta^7 (z-\zeta) f_1(\zeta) f_2(\zeta)}.$$

Pour cela, il nous faut minorer sur $|\zeta| = R_n$ les fonctions $|\varphi_1|$ et $|\varphi_2|$. Dans ce qui suit, nous n'établirons ces minorations que dans le demi plan $\overline{\Pi^+} = \{\mathrm{Re}(\zeta) \geq 0\}$, sachant que J_0 est paire.

Le fait que $J_0' = -J_1$ permet de montrer, pour des valeurs de $|\zeta|$ assez grandes (lorsque $\zeta \in \overline{\Pi^+}$) que, pour des constantes strictement positives λ_1 et λ_2,

$$|\zeta| >> 1 \Longrightarrow (|\varphi_j| + |\varphi_j'|)(\zeta) \geq \frac{\lambda_j}{\sqrt{|\zeta|}} e^{r_j |\mathrm{Im}(\zeta)|}.$$

En effet, nous avons les développements asymptotiques suivants, quand $|z|$ est grand[4] :

$$\begin{aligned}
J_0(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\Big(\cos\Big(\zeta - \frac{\pi}{4}\Big) \times (1 + O(1/|\zeta|)) - \sin\Big(\zeta - \frac{\pi}{4}\Big) \times O(1/|\zeta|)\Big)\\
J_1(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\Big(\cos\Big(\zeta + \frac{\pi}{4}\Big) \times (1 + O(1/|\zeta|)) - \sin\Big(\zeta + \frac{\pi}{4}\Big) \times O(1/|\zeta|)\Big)\\
J_2(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\Big(\cos\Big(\zeta + \frac{3\pi}{4}\Big) \times (1 + O(1/|\zeta|)) - \sin\Big(\zeta + \frac{3\pi}{4}\Big) \times O(1/|\zeta|)\Big)
\end{aligned}$$

valables lorsque $|\zeta|$ tend vers $+\infty$ uniformément dans ce demi-plan (la racine carrée est ici celle appartenant au demi-plan $\overline{\Pi^+}$). Les zéros $(\alpha_{jk})_k$ de la fonction φ_j, $j = 1, 2$, dans $\overline{\Pi^+}$ vérifient aussi asymptotiquement

$$\sqrt{\frac{r_j \pi |\alpha_{jk}|}{2}} \approx |\cos(r_j \alpha_{jk} - \frac{\pi}{4})| \approx \frac{1}{2} e^{r_j |\mathrm{Im}(\alpha_{jk})|}$$

et constituent donc une suite de points tendant vers l'infini dans le demi-plan et s'accumulant, lorsque l'on va vers l'infini dans ce demi-plan, vers le graphe (union son conjugé), associé à l'équation

$$\sqrt{\frac{r_j \pi |\zeta|}{2}} = \frac{1}{2} e^{r_i \mathrm{Im}(\zeta)}, \mathrm{Im}(\zeta) > 0,$$

assimilable au niveau de son allure à celui de la fonction logarithme népérien. On note Γ_j l'union de ces deux graphes conjugués et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. L'intersection de Γ avec un cercle de centre l'origine et de rayon R consiste donc en huit points. Pour $1/2 > \epsilon > 0$, on introduit les voisinages emboîtés $\Gamma_{\epsilon/2} \subset \Gamma_\epsilon$ de Γ définis respectivement comme les unions des ensembles[5]

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j,\epsilon} &= \Big\{\zeta \in \overline{\Pi^+}\,;\, (\frac{1-2\epsilon}{2}) e^{r_j |\mathrm{Im}\,\zeta|} \leq \sqrt{\frac{r_j \pi |\zeta|}{2}} \leq (\frac{1+2\epsilon}{2}) e^{r_j |\mathrm{Im}\,\zeta|}\Big\},\\
&\quad j = 1, 2,\\
\Gamma_{j,\epsilon/2} &= \Big\{\zeta \in \overline{\Pi^+}\,;\, (\frac{1-\epsilon}{2}) e^{r_j |\mathrm{Im}\,\zeta|} \leq \sqrt{\frac{r_j \pi |\zeta|}{2}} \leq (\frac{1+\epsilon}{2}) e^{r_j |\mathrm{Im}\,\zeta|}\Big\},\\
&\quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

---

[4] Gradshtein & Ryzhik, page 961.

[5] Ici, se reporter au dessin ci-joint : ces ensembles $\Gamma_{j,\epsilon}$ ou $\Gamma_{j,\epsilon/2}$ sont constitués chacun de quatre voisinages, un autour de chaque composante de Γ_j ; ces voisinages s'évasent , ce qui facilite les choses, autour de leur « squelette » que constitue Γ_j lorsque l'on s'éloigne vers l'infini.

Pour $|\zeta| >> 1$ hors de $\Gamma_{j,\epsilon/2}$, il résulte du développement asymptotique de J_0 que $|\varphi_j|$ est minoré par une constante strictement positive $\alpha_{j,\epsilon/2}$.

Les développements asymptotiques de J_1 et J_2 montrent d'autre part que, pour $|\zeta| >> 1$ appartenant à Γ_ϵ, $|\varphi_1'(\zeta)| = |r_j J_1(r_j\zeta)| \geq \eta(j,\epsilon)$ pour un $\eta(j,\epsilon)$ strictement compris entre 0 et $r_j(1-2\epsilon)/2$, tandis que $|\varphi_j''(\zeta)| = r_j^2|J_2(r_j\zeta)| \leq C(j,\epsilon)$, où $C(j,\epsilon) > r_j^2(1+2\epsilon)/2$.

Soit, pour $n >> 1$, C_n le cercle de centre l'origine et de rayon n et $A_{j,n,\epsilon}$ (resp. $A_{j,n,\epsilon/2)}$ l'intersection du demi-cercle $\overline{\Pi^+} \cap C_n$, avec $\Gamma_{j,\epsilon}$ (resp. avec $\Gamma_{j,\epsilon/2}$). Cette intersection est une union de quatre arcs de cercle (un dans chaque quadrant) et l'on a $A_{j,n,\epsilon/2} \subset A_{j,n,\epsilon}$. (les ensembles $A_{j,n,\epsilon}$, $j = 1, 2$, sont disjoints et contiennent, composante connexe par composante connexe, les ensembles $A_{j,n,\epsilon/2}$).

Si ζ_0 et ζ sont deux points d'une même composante connexe de $\Gamma_{j,\epsilon}$, de normes $|\zeta_0|$ et $|\zeta|$ très grandes, tels que le segment $[\zeta, \zeta']$ soit inclus dans $\Gamma_{j,\epsilon}$, il résulte de la formule de Taylor au second ordre que

$$|\varphi_j(\zeta) - \varphi_j(\zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)\varphi_j'(\zeta_0)| \leq \frac{C(j,\epsilon)}{2}|\zeta - \zeta_0|^2\,,$$

ce qui implique, si $|\zeta - \zeta_0| \leq \frac{\eta(j,\epsilon)}{C(j,\epsilon)}$,

$$|\varphi_j(\zeta) - \varphi_j(\zeta_0)| \geq |\zeta - \zeta_0|\Big(|\varphi_j'(\zeta_0)| - \frac{C(j,\epsilon)}{2}|\zeta - \zeta_0|\Big) \geq \frac{\eta(j,\epsilon)|\zeta - \zeta_0|}{2}\,. \quad (4)$$

On constate donc que si ζ_0 est un point de $A_{j,n,\epsilon/2}$ tel que

$$|\varphi_j(\zeta_0)| \leq \frac{\eta^2(j,\epsilon)}{4C(j,\epsilon)}\,,$$

alors, sur la frontière du disque $D(\zeta_0, \frac{\eta(j,\epsilon)}{C(j,\epsilon)})$ (ce disque reste inclus dans $\Gamma_{j,n,\epsilon}$ lorsque n est assez grand), on a grâce à (4)

$$|\varphi_j(\zeta)| \geq \frac{\eta^2(j,\epsilon)}{4C(j,\epsilon)};$$

en suivant la frontière de ce disque au lieu du cercle C_n au voisinage de ζ_0, on « évite » le « puits » où la fonction φ_j était trop petite. On peut ainsi « contourner » les points de $A_{j,n,\epsilon/2}$ posant problème en gardant un lacet simple $\gamma_{n,j}$ de longueur équivalente à C_n, soit $2\pi n$, sur le support duquel la fonction $|\varphi_j|$ est minorée par une constante strictement positive δ_j (indépendante de n) pourvu que n soit grand. On répète cet argument pour $j = 1$ d'abord, puis pour $j = 2$.

L'intégrale $I(\gamma_n)$ se majore donc en

$$\Big|\int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta^3\varphi_1(\zeta)\varphi_2(\zeta)}\Big| \leq \frac{|\gamma_n|}{n^3|n - |z||\delta_1\delta_2}$$

et tend vers 0 (à z fixé) lorsque n tend vers $+\infty$.

Finalement, on déduit de la formule de Cauchy (3) (en la multipliant par z^2) que, pour z fixé,

$$-z^2 = \lim_{n\to+\infty} \Bigg[\varphi_2(z)\Big(\sum_{\substack{f_1(a)=0\\ a\in\mathrm{int}(\gamma_n)}} \frac{z^7 f_1(z)}{a^7(z-a)f_1'(a)f_2(a)} + f_1(z)P_0(z)\Big)$$

$$+\varphi_1(z)\Big(\sum_{\substack{f_2(b)=0\\ b\in\mathrm{int}(\gamma_n)}} \frac{z^7 f_2(z)}{b^7(z-b)f_2'(b)f_1(b)}\Big)\Bigg].$$

1.5 Conclusion.

On va utiliser le théorème suivant.

Théorème 1.5.1 (Paley-Wiener-Schwartz)**.** *Les transformées de Fourier des distributions dans $\mathbb{R}^2$ de support compact inclus dans le disque $D(0,R)$ sont exactement les fonctions de deux variables*

$$(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^2 \mapsto F(\omega_1,\omega_2)$$

qui se prolongent à $\mathbb{C}^2$ en des fonctions analytiques (c'est-à-dire développables en série double de puissances de z_1, z_2), le prolongement vérifiant

$$\forall\,(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\ ,|F(z_1,z_2)| \le C_N(1+|z_1|+|z_2|)^N e^{R\sqrt{|\mathrm{Im}(z_1)|^2+|\mathrm{Im}(z_2)|^2}}$$

pour un certain entier N et une certaine constante positive C_N. En particulier, les transformées de Fourier des distributions dans $\mathbb{R}^2$ radiales et de support compact inclus dans le disque $D(0,R)$ sont exactement les fonctions paires qui s'écrivent

$$(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^2 \mapsto h\Big(\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\Big),$$

où h est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe paire telle que

$$\forall\, z\in\mathbb{C}\,,\ |h(z)| \le C_N(1+|z|)^N e^{R|\mathrm{Im}\, z|},$$

pour un certain entier N et une certaine constante positive C_N.

Ici, c'est le second volet de ce théorème que nous pouvons appliquer, pour reconnaître en les fonctions

$$S_{1,n}(\omega_1,\omega_2) = \Big(\sum_{\substack{f_1(a)=0\\ a\in\mathrm{int}(\gamma_n)}} \frac{z^7 f_1(z)}{a^7(z-a)f_1'(a)f_2(a)} + f_1(z)P_0(z)\Big)_{|z=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$$

et

$$S_{2,n}(\omega_1,\omega_2) = \Big(\sum_{\substack{f_2(b)=0 \\ b\in \mathrm{int}(\gamma_n)}} \frac{z^7 f_2(z)}{b^7 (z-b) f_2'(b) f_1(b)} \Big)_{|z=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$$

des transformées de Fourier de distributions à support compact radiales de supports respectifs dans les disques $D(0,r_1)$ et $D(0,r_2)$, notées respectivement $\nu_{1,n}$ et $\nu_{2,n}$. Attention, il faut ici remarquer que ces fonctions de z sont paires, ce qui est le cas puisqu'on a pris soin de choisir le support de γ_n symétrique par rapport à l'axe réel ! De même, on verrait que P_0 doit être un polynôme pair en z (cela devrait être en tout cas être le cas), auquel cas $f_1 P_0$ correspond aussi à une distribution radiale.

En reprenant soigneusement les estimations, nous pouvons vérifier que ce que nous venons de montrer est que la suite des transformées de Fourier des distributions (toutes à support dans le disque $D(0, r_1 + r_2)$ et toutes radiales)

$$\Big((\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_2}) * \nu_{1,n} + (\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_1}) * \nu_{2,n} \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge (comme suite de transformées de Fourier de distributions à support compact, donc tempérées) vers la distribution $-z^2$, à savoir la transformée de la distribution $-\Delta[\delta]$. Comme la transformation de Fourier agit isomorphiquement (et en particulier bi-continuement) sur l'espace des distributions tempérées, on voit que la suite

$$\Big((\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_2}) * \nu_{1,n} + (\delta_{(0,0)} - \sigma_{r_1}) * \nu_{2,n} \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge comme suite de distributions à support compact (donc au sens des distributions) vers $-\Delta[\delta]$. En convolant ceci avec une fonction C^∞ vérifiant les conditions (1), on constate que $\Delta[f] = 0$. On en conclut donc que f est harmonique !

2 Théorème de Morera revisité

2.1 Mise en équation du problème

Le théorème de Morera établit qu'une fonction est holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ si et seulement si l'intégrale sur le bord de tout triangle inclus dans U est nulle. Nous allons suggérer[6] une version beaucoup plus faible de ce résultat : une fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si est seulement si l'intégrale sur le bord d'*un* triangle ainsi que de toutes ses images par déplacement (i.e composé d'une translations et d'une rotation) est nulle. Autrement dit, si T est un triangle, et D désigne le groupe des déplacements du plan :

$$f \in H(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \forall \sigma \in D, \int_{\partial\sigma(T)} f(z)dz = 0. \tag{5}$$

Par la formule de Stokes, en orientant le bord positivement :

$$\int_{\partial\sigma(T)} f(z)dz = \int_{\sigma(T)} df \wedge dz = \iint_{\sigma(T)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \right) \wedge dz$$

De plus, $dz \wedge dz = 0$, et par définition, si $z = x + iy$,

$$d\overline{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy.$$

On obtient donc :

$$\int_{\partial\sigma(T)} f(z)dz = 2i \iint_{\sigma(T)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dx \wedge dy = 2i \iint_{\sigma(T)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dxdy,$$

si $dxdy$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi :

$$\forall \sigma \in D, \int_{\partial\sigma(T)} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \forall \sigma \in D, \iint_{\sigma(T)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dxdy = 0.$$

Le problème (5) devient ainsi :

$$f \in H(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \forall \sigma \in D, \iint_{\sigma(T)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dxdy,$$

et comme $f \in H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (même au sens des distributions du fait de l'hypoellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow \forall \sigma \in D, \iint_{\sigma(T)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y)dxdy = 0.$$

[6] Faute d'avoir les outils adéquats pour en donner comme pour le problème de Delsarte une solution complète.

Posons $u = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$; cela permet de poser le problème (5) en ces termes ; si u est une fonction continue[7] de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$,

$$u = 0 \Longleftrightarrow \forall \sigma \in D, \iint_{\sigma(T)} u(x, y) dxdy = 0. \tag{6}$$

Tout déplacement du plan se décomposant en une translation t et une rotation r, si $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des rotations :

$$\begin{aligned} & \forall \sigma \in D, \ \iint_{\sigma(T)} u(x, y) dxdy = 0 \\ & \Longleftrightarrow \forall r \in \mathcal{R}, \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \iint_{r(T)} u(x + t_1, y + t_2) dxdy = 0. \end{aligned}$$

Par rotation d'angle π, on obtient de plus ($\mathcal{R} = \{e^{i\pi} r, r \in \mathcal{R}\}$) :

$$\begin{aligned} & \forall r \in \mathcal{R}, \ \iint_{r(T)} u(x + t_1, y + t_2) dxdy = 0 \\ & \Longleftrightarrow \forall r \in \mathcal{R}, \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{r(T)}(x, y) u(t_1 - x, t_2 - y) dxdy = 0 \end{aligned}$$

car

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{r(T)}(x, y) u(t_1 - x, t_2 - y) dxdy = \iint_{-r(T)} u(x + t_1, y + t_2) dxdy.$$

On utilise de nouveau la convolution (c'est d'ailleurs pourquoi ces deux problèmes sont associés !), en écrivant :

$$\iint_{\sigma(T)} u(x, y) dxdy = 0 \Longleftrightarrow \forall r \in \mathcal{R}, \chi_{r(T)} * u = 0.$$

2.2 Calcul des transformées de Fourier des fonctions indicatrices de triangles

Soit T le triangle (OM_1M_2), avec O l'origine, $M_1 = (0, \lambda)$ et $M_2 = (a, b)$, où $\lambda > 0$ et où a et b sont des réels tels que $b \neq 0$. Par déplacement du plan, tout triangle peut se ramener à T, pour des valeurs de λ, a et b bien choisies. T étant l'enveloppe convexe de ses trois sommets, on peut écrire :

$$T = \{(ta, tb + s\lambda), t + s \leq 1, (t, s) \geq 0\}.$$

En notant χ_T l'indicatrice du triangle, on obtient :

[7] On pourrait même se contenter de supposer u localement intégrable, auquel cas $u = 0$ est à comprendre $dxdy$ presque partout.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\chi_T} : (\omega_1, \omega_2) \mapsto & \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)} \chi_T(x,y) dx dy \\
= & \int_0^1 \left(\int_0^{1-t} e^{-i(\omega_1 ta+\omega_2(tb+s\lambda))} ds \right) dt \\
= & \int_0^1 e^{-i(\omega_1 ta+\omega_2 tb)} \left(\int_0^{1-t} e^{-i\omega_2 s\lambda} ds \right) dt \\
= & \frac{1}{i\lambda\omega_2} \int_0^1 e^{-i(\omega_1 ta+\omega_2 tb)} \left(1 - e^{-i\omega_2\lambda(1-t)}\right) dt \\
= & \frac{e^{-i(\omega_1 a+\omega_2 b)} - 1}{\lambda\omega_2(a\omega_1 + b\omega_2)} + \frac{e^{-i\lambda\omega_2}}{\lambda\omega_2(a\omega_1 + (b-\lambda)\omega_2)} \left(1 - e^{-i(a\omega_1+(b-\lambda)\omega_2)}\right) \\
= & \frac{a\omega_1 + (b-\lambda)\omega_2 + (a\omega_1 + b\omega_2)e^{-i\omega_2\lambda} + \lambda\omega_2 e^{-i(\omega_1 a+\omega_2 b)}}{\lambda\omega_2(a\omega_1 + b\omega_2)(a\omega_1 + (b-\lambda)\omega_2)}.
\end{aligned}
$$

Comme pour le problème des deux cercles, si on suppose que f définit une distribution tempérée, c'est aussi le cas pour $\overline{\partial} f$ et la transformée de Fourier échangant produit de convolution en produit, on a :

$$\forall(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2, \widehat{\chi_{r(T)} * u}(\omega_1, \omega_2) = \widehat{\chi_{r(T)}}(\omega_1, \omega_2)\widehat{u}(\omega_1, \omega_2).$$

Si l'on prend deux rotations ρ_1 et ρ_2 telles que les angles θ_1 et θ_2 de ces trois rotations soient linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors les trois transformées de Fourier des indicatrices de triangles n'ont pas de zéros communs. On conclut comme pour le premier problème qu'alors $\overline{\partial} f = 0$, ce qui donne le résultat.

Sinon en suivant le raisonement du premier problème on doit pouvoir écrire une formule de division du type

$$1 = F_1 G_1 + F_2 G_2 + F_3 G_3$$

avec F_1, F_2, F_3 les transformées de Fourier des indicatrices du triangle T, $\rho_1(T)$, $\rho_2(T)$, où ρ_1 et ρ_2 sont des rotations tels que le quotient des deux angles de rotations soit irrationnel. Pour cela il faudrait étudier les fonctions à plusieurs variables.

Conclusion

Ce TER est inspiré d'un problème ancien, le problème de Pompeïu : le seul domaine Γ du plan qui ne vérifie pas la propriété suivante :

$$\forall \sigma \in D, \iint_{\sigma(\Gamma)} f(z)dz = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

est le disque. Il a permis de mettre en exergue le lien étroit entre l'analyse complexe et la théorie plus récente des distributions.

Bibliographie

- Jean Delsarte, *Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 246 (1958), pp. 1358-1360 (à la bibliothèque de Mathématiques- Informatique).
- E. Amar, E. Matheron, *Analyse Complexe*, Cassini (à la bibliothèque Lamartine).
- Gradshteyn, I. M. Ryzhick, *Tables of Integrals*, Series and Products, New York, Academic Press, 1980 (à la bibliothèque de Mathématiques-Informatique).
- A. Yger, *Analyse Complexe et Distributions*, Ellipses 2001 (à la bibliothèque Lamartine).
- J. Dieudonné *Calcul infinitésimal*, Hermann 1968 (à la bibliothèque Lamartine).