Rapport de projet.

Étude théorique de quelques fonctionnelles et EDP
utilisées en traitement d'images.

Fabien PIERRE.

TdSI, Master 2.

fabien.pierre@etu.u-bordeaux1.fr

sous la direction de

Jean-François AUJOL.

Université Bordeaux 1.

Orphée s'éloigne lentement de celle qu'il aime, laissant Euridice, héraldique et virginale, dans la plus belle ville du monde. Adieu mon cœur !

Michel Audiard.

Introduction.

Dans ce projet nous avons décidé d'étudier quelques fonctionnelles couramment utilisées en traitement d'image. Nous démontrerons l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation de chaque fonctionnelle dans l'espace maximal [1] dans lequel cette fonctionnelle est définie. Cela nous mènera à des espaces dont les propriétés peuvent comporter des points techniques délicats. Une partie des théorèmes a été admise. On peut les trouver, pour la plupart d'entre eux, dans des UE de Master 1 de mathématiques fondamentales, telles que « Analyse fonctionnelle » ou « Théorie des distributions » : leur étude n'a pas d'intérêt pour ce projet. Nous avons étudié pour le cas $W^{1,2}$, le lien entre ces fonctionnelles et les EDP associées. Ce cas a été retenu pour son côté technique d'un niveau ni trivial ni insurmontable. Les autres cas contiennent une étude étendue sur les problématiques qu'il a été possible d'aborder dans le cadre d'un projet. On s'est systématiquement intéressé à la preuve et à une étude des propriétés de base de l'espace, et on a cherché, lorsque cela était possible, l'équation d'Euler-Lagrange associée. Il n'a pas été pratiqué d'implémentation de minimisation, tout ayant été fait lors du stage de Master 1. Ce projet est une étude théorique de la plupart de ce qui y a été implémenté et étudié dans une optique numérique. Le plan qui a été retenu est d'aller du cas le plus simple, $\mathbb{R}^n$, au cas le plus compliqué : $BV(\Omega)$.

Pour le lecteur qui ne serait pas passionné par la théorie, il pourra se contenter de lire les Parties 1 et 7. Quant à celui qui veut seulement se faire une idée des preuves théorique d'existence de minimum de fonctionnelle sans se soucier de la topologie des espaces fonctionnels, on ne saurait mieux lui conseiller que de se pencher sur le cas $\mathbb{R}^n$, en Partie 2, et en particulier, avant d'étudier les preuves plus techniques des espaces de Sobolev, d'étudier les méthodes employées lors du Paragraphe 2.2, ce qui lui fournira déjà un point de vue synthétique.

Remerciements.

Je tiens à remercier Jean-François Aujol de m'avoir proposé un sujet de projet correspondant à mes attentes et mes besoins. Ce fut une expérience passionnante et enrichissante. J'ai adoré ce type d'analyse fonctionnelle. Je le remercie aussi pour tous les conseils d'ordre humain qu'il a pu me donner.

Je remercie aussi Jean-François Giovannelli pour les conseils prodigués quant à la rédaction de ce rapport de projet. J'espère que l'amélioration, par cela, sera sensible.

Je remercie également Ava Gardner (posthume) dont j'ai utilisé le portrait sans autorisation, pour illustrer l'utilité de conserver les contours.

1. Au sens de l'inclusion, évidemment !

Table des matières

1 Motivations quant aux différents cas étudiés.

L'ensemble de ce projet et de son rapport sont basés sur une étude théorique de problèmes d'inversion régularisée, i.e. de problèmes que l'on veut sous la forme

$$u_0 = \text{argmin}_u ||Au - f||_2^2 + F(u) \ ,$$

c'est à dire un problème de minimisation d'une fonctionnelle. Le terme d'*attache aux données* sera toujours une norme L^2, et c'est seulement le terme de *régularisation* J qui sera modifié selon les cas. Le premier cas étudié sera le problème de la régularisation de Tychonov (on mentionnera aussi d'autres régularisations sans entrer dans les détails.), où le terme de régularisation est la norme-2 d'un filtre passe-bas appliqué à u. Cette fonction étant deux fois dérivable, la minimisation n'est pas difficile. On a adopté dans la preuve, un point de vue du calcul différentiel pour simplifier mais on peut comme dans [9], page 175 adopter un point de vu plus topologique du problème. Cela peut éventuellement permettre de fixer des idées pour les preuves suivantes, lesquelles deviennent plus difficiles que pour le premier cas pour des raisons de dimension. On se servira de cette preuve en Section 2.2.

On commencera par le cas $\mathbb{R}^n$, le plus simple, puis on continuera sur les espaces de Sobolev, du plus simple $W^{1,2}(\Omega)$, au plus compliqué, $W^{1,1}(\Omega)$. Puis on terminera sur le modèle plus évolué de ce projet, un espace lié à la théorie de la mesure, l'espace $BV(\Omega)$.

Pour le cas $W^{1,2}(\Omega)$, on s'est placé sur l'espace fonctionnel maximal au sens de l'inclusion tel que la fonctionnelle soit définie. Le problème qui intervient alors est d'ordre purement topologique pour pouvoir mener le raisonnement sur le même schéma : la dimension de $W^{1,2}(\Omega)$ est infinie, les fermés bornés pour la topologie forte qui est associée à cet espace, ne sont pas compacts (Théorème de Riesz [2].) En revanche, il a tout de même le bon goût d'être un espace de Hilbert réflexif et séparable, ce qui lui confère de bonnes propriétés de compacité faible. Les inégalités de Sobolev permettent de conclure. Lorsque l'on change le terme de régularisation, et que l'on utilise la norme-p du gradient, on se place alors sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$, qui n'est plus un espace de Hilbert mais seulement un espace de Banach réflexif. Cela ne pose pas de problème immédiat car $W^{1,p}(\Omega)$ étant un espace de Banach réflexif, il conserve par cela de bonnes propriétés topologiques vis à vis de la topologie faible, et le raisonnement effectué pour $W^{1,2}(\Omega)$ est encore valide. Ce n'est plus le cas lorsque le terme de régularisation est la norme-1 du gradient, et que l'on se place sur l'espace $W^{1,1}(\Omega)$: en effet cet espace n'est pas réflexif : $L^{1"} \subset \overline{L^1}$. Et l'on montrera par un contre-exemple que les deux hypothèses de réflexivité et séparabilité étaient fondamentales pour montrer qu'une fonctionnelle convexe et coercive admettait un minimum.

Nous aborderons également le cas $BV(\Omega)$, espace des fonctions à variations bornées, à la fin du rapport, en présentant des résultats qui font la beauté de cet espace, notamment la formule de la coaire qui relie le périmètre d'un objet d'une image binaire avec la variation totale de l'image. L'avantage notable de cet espace par rapport aux deux espaces de Sobolev mentionnés ci-dessus résulte en sa capacité à contenir des fonctions qui admettent des sauts. Le nombre de sauts pouvant même être particulièrement grand : un résultat, que nous ne mentionnerons ici seulement qu'à titre de curiosité est le suivant (voir [4] page 342).

Théorème 1.1. *Toute fonction à variation bornée peut-être décomposée en une somme de trois fonctions*

$$f = H + \Psi + \chi \ ,$$

où H est une fonction des sauts, Ψ est absolument continue, et χ est singulière.

Ensuite, pour que le projet soit complet, on a abordé le problème du lien entre la fonctionnelle et les EDP pour $W^{1,2}(\Omega)$ qui se présentait comme faisable, car l'EDP associée n'est pas très compliquée (équation de la chaleur) et les méthodes employées (convergence des fonctions d'interpolation, et convergence de l'EDP au sens des distribution) sont non triviales, et représentatives des problèmes d'EDP.

2. Voir par exemple [11], page 113.

Enfin, pour terminer, on illustrera l'avantage de l'espace BV par rapport aux espaces de Sobolev par des images provenant du stage effectué l'an dernier.

2 Cas $\mathbb{R}^n$.

Ce cas d'étude est le plus simple. On considère, qu'une image numérique peut s'apparenter à une fonction d'un ouvert borné de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{R}$ (échantillonnage spatial). De manière naturelle, ce concept permet d'identifier ces fonctions avec un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Dans le but de déconvoluer, de débruiter, d'inpainter, etc, il convient de poser ces divers problèmes en terme de minimisation de fonctionnelles. On étudie donc, dans le cas ou notre image s'identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^n$, une fonctionnelle relativement générique comprenant un terme d'attache aux données et un terme de régularisation.

2.1 Minimum d'une fonctionnelle.

On cherche à montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème d'optimisation suivant :

$$F(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} F(u) \ ,$$

avec $F(u) = ||u - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2$.

On peut parfaitement généraliser ce résultat sous la forme suivante :

$$F(u) = ||u - f||_2^2 + ||Du||^2 \ ,$$

avec $||Du||$ convexe et coercive sur l'espace des fonctions à moyenne nulle, ou encore, de noyau réduit aux constantes.

Un premier résultat, qui n'est pas difficile, mais dont on copiera la preuve à plusieurs reprises dans ce rapport sous des formes qui pourront être un peu plus délicates, est le suivant :

Proposition 2.1. *La fonctionnelle F définie par*

$$F(u) = ||u - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2$$

est strictement convexe et coercive pour la norme $||.||_2$.

Démonstration. Montrons d'abord que $||u - f||_2^2$ est strictement convexe.

En effet pour tout $u, v \in H$, et $t \in [0, 1]$, on a :

$$||tu + (1 - t)v + tf - (1 - t)f||_2^2 \leqslant (t||u - f||_2 + (1 - t)||v - f||_2)^2 \ ,$$

et par stricte convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ on obtient, pour tout $t \in]0, 1[$:

$$(t||u - f||_2 + (1 - t)||v - f||_2)^2 < t||u - f||_2^2 + (1 - t)||v - f||_2^2.$$

En raisonnant de même avec $||\nabla u||_2^2$, et puisque la somme d'une fonction strictement convexe avec une fonction convexe est strictement convexe, on a que $F(u)$ est strictement convexe.

Pour montrer la coercivité, on montre que $||u - f||_2^2$ est coercive :

$$\begin{aligned} ||u - f||_2^2 &= \langle u - f | u - f \rangle \\ &= ||u||_2^2 - 2 \langle u | f \rangle + ||f||_2^2 \\ &\geqslant ||u||_2^2 - 2||u||_2||f||_2 + ||f||_2^2 \text{ par Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Et cette dernière expression tend vers $+\infty$ lorsque $||u||_2$ tend vers $+\infty$.

Comme $||\nabla u||_2 \geqslant 0$, il en découle que $F(u)$ est coercive. □

Dans le but de construire des algorithmes itératifs à point fixe, il peut être très utile de connaitre une équation permettant de caractériser une solution au problème de minimisation, notamment lorsque l'on résout par des algorithmes de descente de gradient.

Corollaire 2.2 (Caractéristique de la solution.)**.** *Le problème*

$$F(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} F(u) \ ,$$

avec $F(u) = ||u - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2$ *admet une unique solution, caractérisée par l'*équation normale *:*

$$u_0 = \left(I_d + D^t D\right)^{-1} f.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble $K := \{u \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } F(u) \leqslant F(0)\}$.

K est un fermé de $\mathbb{R}^n$ car image réciproque du fermé $]-\infty, F(0)]$ par l'application continue F.

Puisque F est convexe, K l'est aussi. En effet soient $u, v \in K$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a que

$$\begin{aligned} F(tu + (1-t)v) & \leqslant tF(u) + (1-t)F(v) \\ & \leqslant F(0). \end{aligned}$$

Enfin, K est borné. En effet, puisque F est coercive pour la norme $||.||_2$, il existe par définition $M \in \mathbb{R}$ tel que $F(u) \leqslant F(0)$ implique $||u||_2 < M$.

Donc, sur K la fonctionnelle F admet un minimum u_0. Il est unique par stricte convexité de F. En effet supposons que $u_1 \neq u_0$ soit un deuxième minimum de F, alors $u_2 := \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_0$ est tel que $F(u_2) < \dfrac{1}{2}F(u_1) + \dfrac{1}{2}F(u_0) = F(u_0)$ ce qui contredit le fait que u_0 soit le minimum. Donc u_0 est bien l'unique minimum de F sur K.

Et comme $F(u) \geqslant F(v) \geqslant F(u_0)$, $\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus K, v \in K$, on a donc que u_0 est l'unique minimum de la fonctionnelle F.

On obtient l'équation normale en dérivant F :

$$\begin{aligned} F(u) & = (u-f)^t(u-f) + u^t D^t D u \\ & = u^t u - 2u^t f + f^t f + u^t D^t D u \end{aligned} .$$

On obtient donc $F'(u) = 2u + 2D^t D u - 2f$. Ce qui permet d'obtenir l'équation de Legendre $\left(I_d + D^t D\right) u = f$.

$D^t D$ est symétrique et diagonalisable dans une base orthonormée avec valeurs propres positives. Donc $I_d + D^t D$ est diagonalisable dans une base orthonormée avec valeurs propres supérieures à 1. Ce qui nous permet de dire que $I_d + D^t D$ est inversible. Ce qui permet de confirmer que l'on a un unique extrémum donné par $u_0 = \left(I_d + D^t D\right)^{-1} f$, et c'est un minimum car la hessienne de F, donnée par $H.F = 2\left(I_d + D^t D\right)$, est définie positive. □

2.2 Problème d'inversion régularisée standard.

On généralise ce que l'on vient de faire au problème d'inversion régularisée standard :

$$F(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} F(u) \ ,$$

avec $F(u) = ||Au - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2$, où A est un opérateur linéaire et continu qui n'annule pas les constantes.

Ici aussi on remarque que l'on peut généraliser le résultat de la manière suivante :

$$F(u) = ||Au - f||_2^2 + ||Du|| \ ,$$

avec $||Du||$ coercive sur l'espace des fonctions à moyenne nulles.

On commence par ce résultat essentiel :

Théorème 2.3. *La fonctionnelle F est strictement convexe et coercive pour la norme $||.||_2$.*

Démonstration. La stricte convexité résulte de la linéarité de l'opérateur et le schéma de preuve resservira pour celle de la proposition (3.11).

Pour la coercivité, commençons par remarquer que l'on peut décomposer $\mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}^n = M \oplus^{\perp} N \ ,$$

où M est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à moyenne nulle et N l'ensemble des fonctions constantes. La somme étant directe et orthogonale, il vient donc une formule de Pythagore : soit $u \in \mathbb{R}^n$, alors u se décompose de façon unique en $u = v + w$ avec $u \in N$ et $w \in M$ et $v \perp w$ et donc

$$||u||_2^2 = ||v||_2^2 + ||w||_2^2.$$

Montrons maintenant que si $F(u_n)$ est bornée uniformément, alors u_n l'est également. $F(u_n) \leqslant C$ donc [3] $||Au_n - f||_2^2 \leqslant C$ et $||\nabla u_n||_2^2 \leqslant C$.
On décompose $u_n = \tilde{u}_n + \overline{u}_n$, où $\overline{u}_n$ est constante et $\tilde{u}_n$ est à moyenne nulle.
Contrôle sur $\tilde{u}_n$: On utilise l'équivalence des normes en dimension finie pour minorer :

$$C \geqslant ||\nabla u_n||_2^2 = ||\nabla \tilde{u}_n||_2^2 \geqslant ||\tilde{u}_n||_2^2.$$

C'est ici qu'intervient le fait que l'on puisse généraliser le problème en remplaçant $||\nabla \tilde{u}_n||_2^2$ par $||Du||^2$ grâce à l'équivalence des normes en dimension finie.
Contrôle sur $\overline{u}_n$: On écrit

$$\begin{aligned} ||A\overline{u}||_2 &= ||A\overline{u} - A\tilde{u} + A\tilde{u} + f - f||_2 \\ &\leqslant ||Au - f||_2 + ||f||_2 + ||A\tilde{u}||_2 \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

Mais $\overline{u}_n$ est constante donc $A\overline{u}_n = \overline{u}_n A(1)$. Donc puisque $||A\overline{u}_n||_2 \leqslant M$ on obtient

$$\overline{u}_n \leqslant \frac{M}{||A(1)||_2}.$$

D'où

$$||\overline{u}_n||_2 \leqslant C.$$

Et donc par Pythagore, on obtient que

$$||u_n||_2 \leqslant C.$$

Ce qui démontre bien (par contraposée) que F est coercive.

□

Cela permet alors de montrer le résultat qui nous intéresse :

Théorème 2.4. *Le problème*

$$F(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} ||Au - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2 \ ,$$

où A est un opérateur linéaire et continu qui n'annule pas les constantes, admet une unique solution, caractérisée par l'équation d'Euler-Lagrange

$$A^t f = \left(A^t A + \nabla^t \nabla\right) u.$$

Démonstration. L'unicité de la solution, provient, comme dans les cas où $A = Id$, de la stricte convexité de la fonctionnelle.

Pour l'existence, on va utiliser un raisonnement différent qui nous initiera pour aborder les preuves qui vont suivre.

3. On utilisera des noms de variable génériques sans se soucier de savoir avec précision combien elles valent ou comment elles se comparent.

On pose $F(u) = ||Au - f||_2^2 + ||\nabla u||_2^2$ qui est une fonctionnelle positive, donc admet un infimum [4]. Considérons donc une suite minimisante, i.e. une suite u_n telle que

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{u\in\mathbb{R}^n} F(u).$$

La fonctionnelle est coercive et la suite $(F(u_n))_n$ étant bornée, il vient que la suite u_n est bornée uniformément. Puisque l'on est dans $\mathbb{R}^n$, cette suite admet une sous-suite convergente vers un élément, disons u_∞. Puisque F est continue on peut donc obtenir :

$$F(u_\infty) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = \inf_{u\in\mathbb{R}^n} F(u).$$

Ce qui montre l'existence d'un minimum, u_∞.

□

2.3 Vers les EDP.

On peut choisir de regarder notre solution comme celle d'une EDP que l'on ferait évoluer dans le temps. Pour cela on on discrétise le problème en temps en définissant un suite par récurrence dont on imagine qu'elle est une solution d'évolution dans le temps, ce dernier évoluant avec l'index.

Définition 2.5. Posons la fonctionnelle suivante :

$$F(u, u_n) = ||u - f||_2^2 + ||Du||_2^2 + \frac{||u - u_n||_2^2}{\delta_t}.$$

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^n \ , \\ u_{n+1} = \inf_{u\in\mathbb{R}^n} F(u, u_n) \ , \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Proposition 2.6. *Cette suite est bien définie. Elle est caractérisée,* via *l'équation d'Euler-Lagrange, par :*

$$f = u_{n+1} + D^t D u_{n+1} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta_t} \ ,$$

version discrétisée de l'EDP :

$$f(x) = u(x,t) - \Delta u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$

On peut s'intéresser à l'évolution dans le temps de la solution.

Proposition 2.7. *La suite u_n définie ci-dessus est convergente.*

On aura besoin dans la preuve, du lemme suivant :

Lemme 2.8. *La suite u_n est bornée.*

Démonstration. du lemme. Tout d'abord, on utilise $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $F(u_{n+1}, u_n) \leqslant F(u, u_n)$ (qui découle de la définition), dans le cas particulier $u = u_n$:

$$F(u_{n+1}, u_n) \leqslant F(u_n, u_n) \iff ||u_{n+1} - f||_2^2 + ||Du_{n+1}||_2^2 + \frac{||u_{n+1} - u_n||_2^2}{\delta_t} \leqslant ||u_n - f||_2^2 + ||Du_n||_2^2 \ ,$$

4. Aussi démodé que puisse paraitre ce mot utilisé dans les années 70 dans le livre de Jean Alexandre Dieudonné *Les fondements de l'analyse moderne*, nous le conserverons ici, pour rendre hommage à ce grand mathématicien des livres duquel j'ai tiré un enseignement des plus sain. Pour l'anecdote, ce terme n'apparait pas dans *Calcul infinitésimal* (1968), où il n'est question que de *borne inférieure* d'une fonction. Cette curiosité trouve son explication par le fait que la version originale de *Les fondements de l'analyse moderne* fut publiée en anglais, en 1960, chez Academic Press inc, et traduit de l'anglais par Mademoiselle Huet, Professeur à la faculté des sciences de Dijon. Nous lui devons donc ce mot.

et donc on obtient :

$$||u_{n+1} - f||_2^2 + ||Du_{n+1}||_2^2 \leqslant ||u_n - f||_2^2 + ||Du_n||_2^2.$$

Ainsi, si le terme de droite est borné par L, il en est de même pour le terme de gauche. Et comme $||u_0 - f||_2^2 + ||Du_0||_2^2$ est borné, alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ ||u_n - f||_2^2 + ||Du_n||_2^2 \leqslant L.$$

Par coercivité de la fonction

$$u \mapsto ||u - f||_2^2 + ||Du||_2^2$$

pour la norme $||.||_2$, on obtient qu'il existe M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ ||u_n||_2 \leqslant M.$$

□

Démonstration. de la proposition (2.7). Tout d'abord on a $F(u_{n+1}, u_n) \leqslant F(u_n, u_n)$ par définition de u_{n+1}. Donc

$$||u_{n+1} - f||_2^2 + ||Du_{n+1}||_2^2 + \frac{||u_{n+1} - u_n||_2^2}{\delta_t} \leqslant ||u_n - f||_2^2 + ||Du_n||_2^2.$$

Ainsi :

$$||u_{n+1} - u_n||_2^2 \leqslant \delta_t \left(||u_n - f||_2^2 - ||u_{n+1} - f||_2^2 + ||Du_n||_2^2 - ||Du_{n+1}||_2^2 \right). \qquad (1)$$

En sommant sur n :

$$\begin{array}{lll} 0 & \leqslant \sum_{n=0}^{N} ||u_{n+1} - u_n||_2^2 & \leqslant \delta_t \left(||u_0 - f||_2^2 - ||u_{N+1} - f||_2^2 + ||Du_0||_2^2 - ||Du_{N+1}||_2^2 \right) \\ 0 & \leqslant \sum_{n=0}^{N} ||u_{n+1} - u_n||_2^2 & \leqslant \delta_t \left(||u_0 - f||_2^2 + ||Du_0||_2^2 \right) < +\infty. \end{array}$$

Donc $||u_{n+1} - u_n||_2 \to 0$.

Par le lemme (2.8), u_n est bornée. Ainsi, par compacité, il existe une sous-suite convergente de u_n. Montrons qu'il existe une seule valeur d'adhérence. On écrit l'équation normale pour u_{n+1} :

$$f = u_{n+1} + D^t D u_{n+1} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta_t} \ ,$$

ce qui donne, en passant à la limite de la sous-suite ($||u_{n+1} - u_n||_2 \to 0$) et en notant u_∞ la valeur d'adhérence :

$$\left(I_d + D^t D \right) u_\infty = f \ ,$$

ce qui nous donne une caractéristique de la valeur d'adhérence.

On conclut par inversibilité de l'opérateur $(I_d + D^t D)$, qu'il existe une unique valeur d'adhérence possible, donc la suite u_n est convergente. □

Remarque *:* 2.9 (Schéma explicite). Ici, on a seulement un schéma implicite. Il peut être numériquement plus intéressant de disposer d'un schéma explicite. Le schémas explicite à un intérêt numérique fondamental, puisqu'il permet d'obtenir une suite qui converge vers la solution de notre problème, et donc un calcul numérique implémentable.

Posons la définition d'une autre suite u_n, celle-ci définie par

$$u_n = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} ||u - f||_2^2 + ||Du||_2^2 + \frac{||u - u_{n+1}||_2^2}{\delta_t}.$$

Cela va donner l'équation normale :

$$\left(I_d + D^t D + \frac{I_d}{\delta_t} \right) u_n = f + u_{n+1} \ ,$$

d'où

$$u_{n+1} = \left(I_d + D^t D + \frac{I_d}{\delta_t} \right) u_n - f.$$

Ce qui donne une expression explicite de u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{\delta_t} \right) u_n - \Delta u_n - f.$$

Si l'on pose l'hypothèse supplémentaire que u_n est bornée uniformément, on montre, par un principe identique à celui du schéma implicite que u_n converge.

Notons que même si nous n'avons pas une preuve parfaite de la convergence (nous avons du supposer u_n bornée), nous nous servirons en pratique du schéma explicite plutôt que du schéma implicite qui requiert d'inverser l'opérateur, impossible - ou trop couteux - en général. Ici, il s'agit du Laplacien, opérateur suffisamment creux pour pouvoir calculer numériquement un inverse.

3 Cas de l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

On oublie maintenant de discrétiser l'image, et on choisit de formaliser notre problème en disant que notre image est une fonction d'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$. On pourrait imaginer que cela est inutile de se placer dans un espace plus étendu puisque le théorème de Shannon nous dit que la fonction échantillonnée a un unique représentant continue à partir du moment ou son spectre est borné, et que de plus elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ [5]. Mais cela ne permet pas de modéliser facilement les images car cela nécessite qu'elles soient suffisamment régulières (pas de fonctions angulaires comme des cartes de distances au fond, par exemple). On se place donc sur l'espace maximal sur lequel la fonctionnelle est définie : l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

3.1 Notions utiles.

Sur cet espace, la topologie forte n'a pas de bonnes propriétés de compacité. On forme donc une nouvelle topologie :

Définition 3.1. On définit la convergence faible sur E espace vectoriel normé, et E' son espace dual topologique (espace des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$) de la manière suivante : On dit que x_n converge faiblement vers x, ce que l'on note $x_n \rightharpoonup x$ si :

$$\forall f \in E' \ , \ \lim_{n \to +\infty} \langle f | x_n \rangle = \langle f | x \rangle \, .$$

Où $\langle f|x \rangle$ est défini comme étant $f(x)$.

Cette nouvelle topologie est moins fine, mais conserve une propriété intéressante de bornitude.

Proposition 3.2. *La convergence forte entraine la convergence faible.*
Si $u_n \rightharpoonup u$ alors $||u_n||_2$ est bornée.

Démonstration. De manière immédiate, par la définition même de la norme d'opérateur qui muni E', $|\langle f|x_n\rangle - \langle f|x\rangle| \leqslant |||f|||.||x_n - x||$ ce qui permet de conclure.

On admet le deuxième point. □

Remarque *:* 3.3. La réciproque du premier point de la proposition est fausse [6].

Contre-exemple dans $L^2(0,1)$: la suite (de fonctions) $u_n(x) = \sin(2\pi n x)$ ne converge pas fortement mais elle converge faiblement. On peut admettre que l'ensemble de applications linéaires continues de L^2 dans $\mathbb{R}$ (ie L^{2^*}) s'identifie à L^2 lui-même de la manière suivante :

$$\langle f|\varphi \rangle = \int_{(0,1)} f(t)\varphi(t)dt.$$

On notera momentanément

$$F_n(\varphi) := \langle u_n | \varphi \rangle \, .$$

Pour montrer la convergence faible il faut montrer que $F(\varphi) \to F(\varphi)$ pour tout $\varphi \in L^2$. Mais par continuité on peut seulement montrer cela pour $\varphi \in C_K^\infty$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact. Ce qui va se faire par intégration par partie :

$$\int_0^1 \sin(2\pi n x)\varphi(x)dx = \left[-\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\varphi(x) \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \cos(2\pi n x)\varphi'(x)dx.$$

La partie de droite tends vers 0 car le premier terme vaut 0 et le deuxième tend vers 0 car l'intégrale est bornée et $\frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En revanche la suite ne converge pas fortement. Si c'était le cas, en appliquant notre proposition, elle convergerait fortement vers 0. Ce qui nous donnerai $||u_n||_{L^2}^2 \to 0$.

5. Voir par exemple Zuily-Queffélec, *"Analyse pour l'agrégation."*
6. Sinon, ça n'aurait vraiment servit à rien de définir la convergence faible !

Mais ce n'est pas le cas. En effet :

$$\begin{aligned} ||u_n||_{L^2}^2 &= \int_0^1 \sin^2(2\pi n x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-\cos(4\pi n x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Des résultats topologiques sur la compacité qui s'avèrera fondamentaux pour faire converger les suites :

Théorème 3.4. [7] *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors la boule unité B_E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

$$B_E = \{x \in E \text{ tel que } ||x|| \leqslant 1\} .$$

Théorème 3.5. *Soit C un ensemble convexe de l'espace vectoriel normé E. Alors C est faiblement fermé (pour $\sigma(E, E')$) si et seulement si C est fortement fermé.*

Dans la suite, la propriété de semi-continuité inférieure sera plus intéressante car plus souvent vérifiée que la continuité dans les espaces de Sobolev.

Définition 3.6. On dit qu'une fonction convexe f est semi-continue inférieurement [8] (abrégé sci) si

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0) \ , \forall x_0 \in E.$$

Corollaire 3.7. *Soit φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Alors φ est sci pour la topologie forte.*

Si $x_n \rightharpoonup x$ on tire

$$\varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons

$$A := \{x \in E \text{ tels que } \varphi(x) \leqslant \lambda\} .$$

A est fermé (pour la topologie forte et convexe, donc par le théorème 3.5, il vient que A est fermé pour la topologie faible. Ce qui montre que φ est sci pour la topologie faible. □

Proposition 3.8. *La fonction $x \mapsto ||x||$ est sci pour la topologie faible.*

Démonstration. Puisque la fonction $x \mapsto ||x||$ est continue pour la topologie forte, elle est sci pour la topologie forte, donc l'épigraphe est fermée pour le topologie forte :

$$\{(x, \alpha) \text{ tel que } ||x|| \leqslant \alpha\} .$$

Il est également convexe donc fermé pour la topologie faible. Donc la fonction $x \mapsto ||x||$ est sci pour la topologie faible.

□

Dans le cas de la déconvolution, nous aurons besoin de cette inégalité importante pour majorer notre suite minimisante. Elle permet de remplacer ce qui permettait de montrer la coercivité dans le cas de la déconvolution dans l'espace $\mathbb{R}^n$: pour rappel, que l'on peut décomposer $\mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}^n = M \oplus^\perp N \ ,$$

où M est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à moyenne nulle et N l'ensemble des fonctions constantes.

7. Il s'agit d'une version très allégée du théorème de Kakutani.
8. On rencontrera aussi l'appellation fermée, traduit de l'anglais *closed*.

Proposition 3.9 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger. [3] page 194.)**.** *Soit Ω un ouvert connexe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$*

$$||u-\overline{u}||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \ ,$$

$$\textit{avec } \overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

3.2 Méthode

Posons notre raisonnement, à partir des résultats antérieurs, afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation.

On pose le problème :

$$F(x_0) = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} F(u) \ , \tag{2}$$

avec $F(u) = ||u-f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}$, où Ω est un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^2$, i.e. localement, $\partial\overline{\Omega}$ est C^1-difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$.

Le cadre naturel qui se pose naturellement pour résoudre ce problème est l'espace $W^{1,2}(\Omega)$, défini comme l'espace des fonctions dans $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est une distribution-fonction représentée par une fonction de $L^2(\Omega)$:

$$W^{1,2}(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \ , \exists g \in L^2(\Omega) \ , \forall \varphi \in C^1_C(\Omega) \ , \forall i \in 1..n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi d\mu = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} g d\mu \right\}.$$

On définit sur cet espace une norme :

$$||u||_{W^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Notons que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. Ce n'est pas le cas dans $W^{1,2}(\Omega)$ car sa dimension n'est pas finie (par exemple contient les fonctions polynômiales). On hérite tout de même des propriétés d'espace de Hilbert qui proviennent de la structure de $L^2(\Omega)$.

On va montrer l'existence d'une solution à ce problème . L'unicité de la solution provient de la stricte convexité de la fonctionnelle.

Proposition 3.10. *La fonctionnelle F définie par*

$$F(u) = ||u-f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}$$

est strictement convexe, coercive pour la norme $||.||_{W^{1,2}(\Omega)}$, et sci pour la topologie faible.

Démonstration. La preuve de la stricte convexité est la même que pour le cas $\mathbb{R}^n$.

Pour la coercivité, c'est plus délicat. On écrit :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= ||u_n - f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n||^2_{L^2(\Omega)} \\ &= ||u_n||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n||^2_{L^2(\Omega)} - 2\langle f|u_n\rangle_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &= ||u_n||^2_{W^{1,2}(\Omega)} - 2\langle f|u_n\rangle_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant ||u_n||^2_{W^{1,2}(\Omega} - 2||f||_{L^2(\Omega)}||u_n||_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant ||u_n||^2_{W^{1,2}(\Omega} - 2||f||_{L^2(\Omega)}||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \text{ car } ||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant ||u_n||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi $F(u_n) \to +\infty$ quand $||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} \to +\infty$, ce qui montre la coercivité de F pour la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Pour la semi-continuité inférieure, il faut montrer que si $u_n \rightharpoonup u$ alors $\liminf_n F(u_n) \geqslant F(u)$. Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= ||u_n - f||^2_{L^2} + ||u_n'||^2_{L^2} \\ &= ||u_n||^2_{L^2} + ||u_n'||^2_{L^2} - 2\langle f|u_n\rangle + ||f||^2_{L^2} \\ &= ||u_n||^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n} - 2\langle f|u_n\rangle + ||f||^2_{L^2} \ , \end{aligned}$$

mais $\langle f|u_n\rangle \to \langle f|u\rangle$, et $x \mapsto ||u_n||^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n}$ est semi continue inférieurement.

D'où l'on déduit par le fait que l'espace des fonctions semi-continue inférieurement est stable par addition et mutiplication par un réel positif (voir [12]) que F est sci.

□

Théorème 3.11. *Le problème (2) admet une unique solution.*

Démonstration. Établissons une méthodologie, calquée dans ses grands principes sur la preuve du théorème (2.3), pour montrer l'existence de ce problème. On commence par poser $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante de $W^{1,2}(\Omega)$, c'est à dire $u_n \to u_\infty$ quand $n \to +\infty$, avec u_∞ tel que

$$F(u_\infty) = \inf_{u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} F(u) \ ,$$

avec $F(u) = ||u-f||^2_{L^2} + ||\nabla u||^2_{L^2}$ Une telle suite existe bien par définition de la borne inf.

$W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert réflexif et séparable.

Puisque F est coercive par la proposition 3.10, on peut majorer la suite u_n uniformément :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } ||u_n|| \leqslant M.$$

Par les théorèmes 3.4 et 3.5 on peut donc utiliser la compacité faible de l'ensemble convexe K défini par

$$K := \{u \in E \text{ tel que } ||u|| \leqslant M\} \, .$$

Quitte à prendre une sous-suite, on écrit que $u_n \rightharpoonup u_\infty$.

D'où l'on tire

$$F(u_\infty) \leqslant \liminf F(u_n).$$

car F est sci pour la topologie faible.

On a donc exhibé u_∞, minimum de la fonctionnelle F. Par stricte convexité, ce minimum est unique. □

Dans $W^{1,2}(\Omega)$, on un principe du maximum, qui sera bien utile pour montrer la convergence, lorsque l'on interpolera l'EDP discrétisée afin de faire le lien avec l'EDP générale.

3.3 Le cas plus général de la déconvolution.

On s'intéresse au problème ci-dessus dans le cas légèrement plus compliqué où l'on a un opérateur.

On pose le problème :

$$\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} ||Au-f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3}$$

où Ω est un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$, A est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ qui n'annule pas les constantes.

Théorème 3.12. *Le problème (3) admet une unique solution sur $W^{1,2}(\Omega)$.*

Démonstration. L'unicité du minimum provient de la stricte convexité de la fonctionnelle : on peut calquer le raisonnement sur la preuve de la proposition (3.10) : Montrons que $||Au-f||^2_2$ est strictement convexe.

En effet pour tout $u, v \in H$, et $t \in [0,1]$, on a :

$$||tAu + (1-t)Av + tf - (1-t)f||^2_2 \leqslant (t||Au-f||_2 + (1-t)||Av-f||_2)^2 \ ,$$

et par stricte convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ on obtient, pour tout $t \in]0,1[$:

$$(t||Au-f||_2 + (1-t)||Av-f||_2)^2 < t||Au-f||^2_2 + (1-t)||Av-f||^2_2.$$

En raisonnant de même avec $||\nabla u||_2^2$, et puisque la somme d'une fonction strictement convexe avec une fonction convexe est strictement convexe, on a que $F(u)$ est strictement convexe.

On pourra calquer la preuve du théorème (3.11) si on arrive à démontrer que la fonctionnelle est coercive. Attachons nous à montrer cela.

Soit u_n une suite minimisante. Il existe donc M une constante telle que

$$\|Au_n - f\|_2^2 \leqslant M \ ,$$

$$\text{et} \ \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant M.$$

Posons alors

$$w_n = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n \ ,$$

et on décompose $v_n = u_n - w_n$.

On cherche un contrôle sur v_n : Puisque w_n est constante (par rapport à la variable spatiale $x \in \Omega$) on obtient

$$\int_\Omega u_n = \int_\Omega v_n.$$

L'inégalité de Poincaré (proposition (3.9)) nous fournit une constante C telle que

$$||v_n||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\nabla u_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant M.$$

On cherche un contrôle sur w_n : on utilise le contrôle que l'on a sur l'attache aux données pour écrire

$$||A(v_n + w_n) - f||_{L^2(\Omega)} \leqslant M.$$

Puis on écrit $Aw_n = (A(v_n + w_n) - f) - Av_n + f$. Et l'on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} ||Aw_n||_{L^2(\Omega)} &\leqslant ||A(v_n + w_n) + f||_{L^2(\Omega)} + ||Av_n||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)} \text{ par inégalité triangulaire,} \\ &\leqslant ||A(v_n + w_n) + f||_{L^2(\Omega)} + K_A||v_n||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)} \text{ par continuité de l'opérateur,} \\ &\leqslant M. \end{aligned}$$

Puisque w_n est une fonction constante alors on peut l'écrire sous la forme $w_n = w_n(x_0, y_0)A(1)$ où 1 est la fonction constante égale à 1 sur Ω et $w_n(x_0, y_0)$ est la valeur que w_n prend en n'importe quel point de Ω. L'inégalité $||Aw_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant M$ devient donc $|w_n| \leqslant \frac{M}{A(1)}$. Ce qui donne un contrôle sur $||w_n||_{L^2(\Omega)}$:

$$||w_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant |\Omega|\frac{W}{A(1)}.$$

On peut donc obtenir la majoration suivante pour u_n :

$$||u_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||w_n||_{L^2(\Omega)} + ||w_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 + C_2 = M.$$

Donc u_n est bornée et on peut conclure, par des arguments de compacité faible, comme dans le cas où $A = Id$, que u_n admet une unique minimum.

□

3.4 Vers les EDP.

3.4.1 Équation d'Euler-Lagrange sur Ω et étude des conditions aux bords de l'ouvert.

L'équation d'Euler-Lagrange permet d'avoir une formulation variationnelle du problème, et d'obtenir des condition aux bords de l'ouvert.

Étudions l'équation d'Euler-Lagrange sur Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On va commencer par étudier l'EDP sur $\mathring{\Omega}$. On écrit donc, pour $\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\forall h \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ tel que $u + h \in \mathring{\Omega}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{F(u+hv)-F(u)}{h} &= \frac{||u+hv-f||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla(u+hv)||^2_{L^2(\Omega)}-||u-f||^2_{L^2(\Omega)}-||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\langle u-f|u-f\rangle + 2\langle u-f|hv\rangle + \langle hv|hv\rangle - \langle u-f|u-f\rangle\right. \\
&+ \left.\langle \nabla u|\nabla u\rangle + 2\langle \nabla u|\nabla hv\rangle + \langle \nabla hv|\nabla hv\rangle - \langle \nabla u|\nabla u\rangle\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(2\langle u-f|hv\rangle + \langle hv|hv\rangle + 2\langle \nabla u|\nabla hv\rangle + \langle \nabla hv|\nabla hv\rangle\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\langle 2(u-f)+hv|hv\rangle + \langle 2\nabla u + \nabla hv|\nabla hv\rangle\right) \\
&= \langle 2(u-f)+hv|v\rangle + \langle 2\nabla u+\nabla hv|\nabla v\rangle \\
&= \langle 2(u-f)|v\rangle + \langle 2\nabla u|\nabla v\rangle + \langle hv|v\rangle + \langle \nabla hv|\nabla v\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Et comme $\langle hv|v\rangle + \langle \nabla hv|\nabla v\rangle$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 et que $\langle 2(u-f)|v\rangle + \langle 2\nabla u|\nabla v\rangle$ est linéaire en v alors cette dernière expression est la dérivée au sens de Gâteau de F dans la direction v.

Si u est le minimum de F alors,

$$\forall v \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \ , \ \langle u-f|v\rangle + \langle \nabla u|\nabla v\rangle = 0.$$

Par densité de $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,2}(\Omega)$,

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega) \ , \ \langle u-f|v\rangle + \langle \nabla u|\nabla v\rangle = 0.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega) \ , \ \langle u-f|v\rangle - \langle \Delta u|v\rangle = 0. \tag{4}$$

La formule de Green (voir [2]) nous donne que :

$$\int_\Omega \mathrm{div}F(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega F(x).\nabla\varphi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x)F(x).n(x)\,d\sigma \ ,$$

ce que l'on applique à $F = \nabla u$ et $\varphi = h$ et cela nous donne :

$$\int_{\mathring{\Omega}} \Delta u(x)h(x)\,dx = -\int_{\mathring{\Omega}} \nabla u(x).\nabla h(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} h(x)\nabla u(x).n(x)\,d\sigma \ ,$$

et par (4), on obtient

$$0 = \int_{\partial\Omega} h(x)\nabla u(x).n(x)\,d\sigma \ ,$$

Donc $\nabla u(x).n(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, qui est la condition de Neumann. On note cela $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

On peut obtenir le principe du maximum suivant :

Théorème 3.13 (Le principe du maximum par la méthode de troncature de Stampachia.)**.** *Soit $f \in L^\infty$ et u une solution au problème 2 alors on a*

$$\inf f \leqslant u \leqslant \sup f \ ,$$

où les sup et inf sont essentiels.

Démonstration. On reprend l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (2) :

$$u - f - \Delta u = 0 \ ,$$

au sens des distributions.

Posons G fonction dite de *troncature*, telle que $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0]$ et G strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On suppose également que $G'(t) \leqslant M$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Posons $k = ||f||_{L^\infty}$ et $v = G(u-k)$.

Comme $u \in W^{1,2}(\Omega)$ alors $v \in W^{1,2}(\Omega)$ par la règle de composition (voir [3] page 155).

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange et multiplions la par v. On écrit :

$$-\int_\Omega v\Delta u \, dx + \int_\Omega (u-f)v \, dx = 0 \ ,$$

ou encore

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega (u-f)v \, dx = 0 \ ,$$

car on a déjà vu que les conditions aux bords sont nulles.

On exploite alors la dérivabilité de v :

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla u G'(u-k) \, dx + \int_\Omega (u-f)G(u-k) \, dx = 0 \ ,$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\int_\Omega ||\nabla u||_2^2 G'(u-k) \, dx + \int_\Omega (u-f)G(u-k) \, dx = 0.$$

Mais comme $||\nabla u||_2^2 \geqslant 0$ et $G'(u-k) \geqslant 0$ car G est croissante. On en déduit donc que :

$$\int_\Omega (u-f)G(u-k) \, dx \leqslant 0 \ ,$$

ou encore :

$$\int_\Omega uG(u-k) \, dx \leqslant \int_\Omega fG(u-k) \, dx.$$

En retirant $\displaystyle\int_\Omega kG(u-k) \, dx$ de chaque côté de l'inégalité, il vient donc :

$$\int_\Omega (u-k)G(u-k) \, dx \leqslant \int_\Omega (f-k)G(u-k) \, dx.$$

Mais $k = ||f||_{L^\infty}$ donc $f - k \leqslant 0$ donc

$$\int_\Omega (u-k)G(u-k) \, dx \leqslant 0.$$

Mais aussi $\forall t \in \mathbb{R}$, $tG(t) \geqslant 0$ donc

$$0 \leqslant \int_\Omega (u-k)G(u-k) \, dx \leqslant 0.$$

Donc $(u-k)G(u-k) = 0$ donc $G(u-k) = 0$ donc, en vertu de la stricte croissance de G sur $\mathbb{R}^+$ et du fait de $G(0) = 0$ on obtient que $u - k \leqslant 0$, en remplaçant k par sa valeur :

$$u \leqslant ||f||_{L^\infty}.$$

□

3.4.2 Schéma itératif.

On commence par créer une version discrète de l'EDP.

Posons la fonctionnelle suivante :

$$F(u, u_n) = ||u-f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{||u-u_n||^2_{L^2(\Omega)}}{\delta_t}.$$

On a montré l'existence d'un minimum qui définira u_{n+1}, une suite par récurrence, caractérisée, *via* l'équation d'Euler-Lagrange, par :

$$f = u_{n+1} + \nabla^t \nabla u_{n+1} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta_t} \ ,$$

version discrétisée de l'EDP :

$$f(u) = u(u,t) - \Delta u(u,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(u,t).$$

Proposition 3.14. *La suite u_n définie ci-dessus est faiblement convergente.*

Démonstration. On montre, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ que $||u_{n+1} - u_n||_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Par les mêmes arguments que pour le lemme (2.8) , la suite u_n est bornée car la fonctionnelle est coercive : $||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant M$.

Par les théorèmes 3.4 et 3.5 on peut donc utiliser la compacité faible de l'ensemble convexe K défini par

$$K := \{u \in E \text{ tel que } ||u|| \leqslant M\}.$$

Quitte à prendre une sous-suite, on écrit que $u_n \rightharpoonup u_\infty$.

Elle admet donc une sous-suite faiblement convergente. Et on conclut par passage à la limite dans

$$f = u_{n+1} + \nabla^t \nabla u_{n+1} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta_t} \ ,$$

à l'unicité de la valeur d'adhérence donc à la convergence faible de la suite.

□

3.4.3 Sur l'espace $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$

Cet espace, dont la manipulation est délicate, est nécessaire pour formaliser proprement le problème qui permet le passage de l'EDP discrète à l'EDP continue.

Définition 3.15 ([6] page 249)**.** Soient a et b deux réels (éventuellement ∞), tels que

$$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty \ ,$$

et soit X un espace de Banach avec la norme $||.||_X$.

Soit α, avec $1 \leqslant \alpha < +\infty$.

On note $L^\alpha([a,b], X)$, l'espace des fonctions $L^\alpha-$intégrables de $[a,b]$ dans X. C'est un espace de Banach pour la norme

$$||f||_{L^\alpha([a,b],X)} = \left(\int_a^b ||f(t)||_X^\alpha \, dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

$L^\infty([a,b], X)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées de $[a,b]$ dans X. Si $-\infty < a < b + \infty$, cet espace est équipé de la norme *sup essentiel* :

$$||f||_{L^\infty([a,b],X)} = \sup_{t \in [a,b] \setminus E_0 \text{ tel que } \mu(E_0) = 0} ||f(t)||_X \ ,$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$.

L'espace $\mathcal{C}([a,b], X)$ est l'espace des fonctions continues de$[a,b]$ dans X : muni de la norme *sup*, c'est un espace de Banach. Si $-\infty < a < b + \infty$:

$$||f||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} ||f(t)||_X \ ,$$

L'espace

$$W^{1,2}([0,T], L^2(\Omega)) := \left\{ v \in L^2([0,T], L^2(\Omega)), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0,T], L^2(\Omega)) \right\} \ ,$$

(la dérivée est prise au sens des distributions) est un espace de Hilbert réflexif.

L'injection compacte nous servira pour montrer des convergences fortes à partir de convergences faibles :

Théorème 3.16 ([6] page 271)**.** *$W^{1,2}([0,T],L^2(\Omega))$ s'injecte de façon compacte dans $L^2([0,T],L^2(\Omega))$.*

Corollaire 3.17. *On a :*

$$W^{1,2}([0,T],W^{1,2}(\Omega)) \hookrightarrow W^{1,2}([0,T],L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2([0,T],L^2(\Omega)) \ ,$$

avec injections compactes.

Remarque : 3.18. Ce dernier corollaire a une conséquence importante qui va nous permettre d'établir un lien puissant entre la convergence faible dans $W^{1,2}([0,T],W^{1,2}(\Omega))$ et la convergence forte dans $L^2([0,T],L^2(\Omega))$ à une sous-suite près. En effet, soit u_n une suite admettant une sous-suite faiblement convergente dans $W^{1,2}([0,T],W^{1,2}(\Omega))$, alors cette sous-suite est bornée dans $W^{1,2}([0,T],W^{1,2}(\Omega))$. Ainsi par le théorème (3.4) et le corollaire ci-dessus, puisque la boule unité est compacte, son image est compacte. Et donc la suite, injectée dans $L^2([0,T],L^2(\Omega))$, admet une sous-suite fortement convergente.

3.4.4 Existence de la solution de l'EDP.

On entre alors dans le vif du sujet, en introduisant une interpolation de la solution.

Définition 3.19 (Fonctions d'interpolation.)**.** Supposons que $t_0 = 0$ et $t_n = n\delta_t$. et posons :

$$\begin{array}{llll} \tilde{u}_{\delta_t}: & \Omega\times\mathbb{R}^+ & \to & \Omega \\ & (x,t) & \mapsto & u_{\lfloor \frac{t}{\delta_t}\rfloor+1}(x) = u_{n+1}(x) \text{ si } t_n < t \leqslant t_{n+1} \ , \end{array}$$

qui est constante par morceaux. Posons aussi :

$$\begin{array}{llll} \hat{u}_{\delta_t}: & \Omega\times\mathbb{R}^+ & \to & \Omega \\ & (x,t) & \mapsto & (t-t_n)\frac{u_{n+1}(x)-u_n(x)}{\delta_t} + u_n(x) \ , \end{array}$$

avec $n = \lfloor \frac{t}{\delta_t} \rfloor$, affine par morceaux et continue.

Remarque : 3.20. Puisque l'intervalle $[0,T]$ est fixe, pour faire tendre n vers l'infini, il faut nécessairement que δ_t tende vers 0.

Théorème 3.21 (Convergence effective.)**.** *Soit $\delta_t > 0$ et soit $u_{\delta_t} \in W^{1,2}([0,T],\Omega)$ telle que $u_n(x) = u(n\delta_t, x)$, avec*

$$f = u_{n+1} + \nabla^t\nabla u_{n+1} + \frac{u_{n+1}-u_n}{\delta_t} \ ,$$

alors $\tilde{u}_{\delta_t} \xrightarrow{\delta_t\to 0} u$ (fort, dans $L^2(\Omega)$), avec u solution de l'EDP :

$$f = u + \nabla^t\nabla u + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Démonstration. Introduisons les fonctions d'interpolations vues précédemment.

On montre facilement :

$$\frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t) = \frac{u_{n+1}(x)-u_n(x)}{\delta_t}.$$

Et aussi :

$$\frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t) = \frac{\tilde{u}_{\delta_t}(x,t)-\tilde{u}_{\delta_t}(x,t+\delta_t)}{\delta_t}.$$

L'égalité

$$f = u_{n+1} + \nabla^t\nabla u_{n+1} + \frac{u_{n+1}-u_n}{\delta_t} \ ,$$

devient alors

$$\frac{\tilde{u}_{\delta_t}(x,t) - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t+\delta_t)}{\delta_t} = f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) + \nabla^t \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) \ ,$$

ou bien encore :

$$\frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t) = f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) + \nabla^t \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t).$$

Tout d'abord, par le lemme (2.8), (6) et le lemme (3.22)ci-dessous on a que $\hat{u}_{\delta_t}$ est bornée dans $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$. Donc on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$:

$$\hat{u}_{\delta_t} \rightharpoonup u.$$

Puisque $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$ s'injecte de façon compacte dans $L^2([0,T], L^2(\Omega))$, on a que $\hat{u}_{\delta_t}$ converge fortement vers u lorsque δ_t tend vers 0 et $\frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}$ converge faiblement vers $\frac{\partial u}{\partial t}$ lorsque δ_t tend vers 0

Ensuite par le lemme (2.8) et (5) ci-dessous, Il vient que $\tilde{u}_{\delta_t}$ est bornée dans $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$. Donc on peut extraire une sous suite-qui converge faiblement dans $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$:

$$\tilde{u}_{\delta_t} \rightharpoonup v.$$

Puisque, par (3.16), $W^{1,2}([0,T], L^2(\Omega))$ s'injecte de façon compacte dans $L^2([0,T], W^{1,2}(\Omega))$, $\tilde{u}_{\delta_t}$ converge fortement vers v lorsque δ_t tend vers 0.

Mais par le lemme (3.23) ci-dessous, on a que $u = v$ donc on peut passer à la limite au sens des distributions dans

$$\frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t) = f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) + \nabla^t \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t).$$

Soit $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on intègre l'équation :

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t)h(x) = \int_\Omega (f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t))h(x) + \int_\Omega \nabla^t \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t)h(x).$$

Ce qui donne en intégrant par partie :

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t)h(x) = \int_\Omega (f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t))h(x) - \int_\Omega \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) \nabla h(x).$$

On passe alors à la limite quand $\delta_t \to 0$:

Le premier terme converge grâce à la convergence faible de $\dfrac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t)$:

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t}(x,t)h(x) \to \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)h(x).$$

Le deuxième terme nous est donné par convergence forte de u_{δ_0} vers u :

$$\int_\Omega (f - \tilde{u}_{\delta_t}(x,t))h(x) \to \int_\Omega (f - u(x,t))h(x).$$

Comme $\tilde{u}_{\delta_t}$ converge faiblement dans $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$ on obtient

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u}_{\delta_t}(x,t) \nabla h(x) \to \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla h(x).$$

En récapitulant :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)h(x) = \int_\Omega (f - u(x,t))h(x) - \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla h(x).$$

Puis, en réintégrant par parties :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)h(x) = \int_\Omega (f - u(x,t))h(x) - \int_\Omega \Delta u(x,t)h(x).$$

On a donc, au sens des distributions, l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f - u - \Delta u.$$

□

La série de lemmes ci-dessous a servi à établir la démonstration. Leurs démonstrations sont fournies en appendice. Tout d'abord le contrôle de la dérivée par rapport au temps :

Lemme 3.22. *Soit $T > 0$ fixé, $\exists C > 0$, qui ne dépend pas de δ_t tel que :*

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t} \right\|_2^2 \leqslant C.$$

Puis le lien fort entre $\tilde{u}$ et $\hat{u}$:

Lemme 3.23. *Soit $T > 0$ fixé,*

$$\lim_{\delta_t \to 0} \int_0^T ||\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}||_2^2 \, dt = 0.$$

Puis pour borner les suites :

Lemme 3.24. *On a les principes du maximum suivants : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$m \leqslant \tilde{u}, \hat{u} \leqslant M.$$

Ainsi que les gradients, car nous sommes dans un espace de Sobolev.

Lemme 3.25. *La suite ∇u_n est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$.*

Corollaire 3.26. *On a les inégalités suivantes :*

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_0^t ||\nabla \tilde{u}_{\delta_t}(s,x)||^2 \, ds < C. \tag{5}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_0^t ||\nabla \hat{u}_{\delta_t}(s,x)||^2 \, ds < C. \tag{6}$$

4 Cas de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, avec $1 < p \leqslant 2$.

Comme pour le cas $W^{1,2}(\Omega)$, on modifie notre fonctionnelle et on se place sur l'espace maximal sur lequel elle est définie.

4.1 Méthode

On se place dans le cas $1 < p \leqslant 2$, et on pose le problème :

$$F(x_0) = \inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} F(u) \ , \tag{7}$$

avec $F(u) = ||u - f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}$, où Ω est un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^n$.

Le cadre naturel qui se pose pour résoudre ce problème est l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ défini comme l'espace des fonctions dans $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est une distribution-fonction représentée par une fonction de $L^2(\Omega)$:

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ , \exists g \in L^p(\Omega) \ , \forall \varphi \in C^1_C(\Omega) \ , \forall i \in 1..n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi d\mu = - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} g d\mu \right\}.$$

On définit sur cet espace une norme :

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On va montrer l'existence d'une solution à ce problème . L'unicité de la solution provient de la stricte convexité de la fonctionnelle.

Proposition 4.1. *La fonctionnelle F définie par*

$$F(u) = ||u - f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}$$

est strictement convexe, coercive pour la norme $||.||_{W^{1,p}(\Omega)}$, et sci pour la topologie faible.

Démonstration. La preuve de la stricte convexité est la même que pour le cas $\mathbb{R}^n$.

Pour la coercivité on écrit :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= ||u_n - f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} \\ &= ||u_n||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} - 2 \langle f | u_n \rangle_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On peut écrire immédiatement, par définition de la norme $||.||_{W^{1,p}(\Omega)}$ que $||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} \leqslant ||u_n||^p_{W^{1,2}(\Omega)}$.

On écrit, par l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega f^p \leqslant \left(\int_\Omega f^{2u_1} \right)^{\frac{1}{u_1}} \left(\int_\Omega 1 \right)^{\frac{1}{u_2}} \ ,$$

avec $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = 1$. Choisissons u_1 tel que $pu_1 = 2$. De cette manière

$$\int_\Omega f^p \leqslant K' \left(\int_\Omega f^2 \right)^{\frac{p}{2}} .$$

Ce que l'on écrit :

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leqslant K' ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} F(u_n) &= ||u_n||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} - 2 \textstyle\int_\Omega f u_n \, d\mu + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant C ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} - 2c ||f||_{L^p(\Omega)} ||u_n||_{L^p(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \text{ avec } c > 0 \ , C > 0 \\ &\geqslant C ||u_n||^{2-p}_{L^p(\Omega)} ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} - 2c ||f||_{L^p(\Omega)} ||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \text{ avec } c > 0 \ , C > 0. \end{aligned}$$

Supposons que $||u_n||_{W^{1,2}(\Omega)} \to +\infty$, alors $F(u_n) \to +\infty$.

Notons que pour être plus rigoureux, il faut voir que si $||u_n||_{L^p(\Omega)} < 1$ alors

$$||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} \geqslant ||u_n||^p_{W^{1,2}(\Omega)} - 1 \ ,$$

et si $||u_n||_{L^p(\Omega)} \geqslant 1$ alors

$$||u_n||^{2-p}_{L^p(\Omega)} ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} \geqslant ||u_n||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Et que l'on peut donc conclure de la même manière en minorant

$$C||u_n||^{2-p}_{L^p(\Omega)} ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega)} \geqslant K||u_n||^p_{W^{1,2}(\Omega)} + B \ ,$$

avec $B \geqslant 0$ et $K > 0$.

Donc que f est coercive pour la norme $||.||_{W^{1,2}(\Omega)}$.

Pour la semi-continuité inférieure, il faut montrer que si $u_n \rightharpoonup u$ alors $\liminf_n F(u_n) \geqslant F(u)$. Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= ||u_n - f||^2_{L^2} + ||\nabla u_n||^p_{L^p} \\ &= ||u_n||^2_{L^2} + ||\nabla u_n||^p_{L^p} - 2\langle f|u_n\rangle + ||f||^2_{L^2} \end{aligned}$$

mais $\langle f|u_n\rangle \to \langle f|u\rangle$, et $x \mapsto ||\nabla x||^p_{L^p}$ est semi continue inférieurement.

D'où l'on déduit par le fait que l'espace des fonctions semi-continue inférieurement est stable par addition et multiplication par un réel positif (voir [12]), que F est sci.

□

Après cela, la méthode est très semblable au cas $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 4.2. *Le problème* (7) *admet une unique solution.*

Démonstration. Établissons une méthodologie pour montrer l'existence de ce problème on commence par poser $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire $u_n \to u_\infty$ quand $n \to +\infty$, avec u_∞ tel que

$$F(u_\infty) = \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} F(u) \ ,$$

avec $F(u) = ||u - f||^2_{L^2} + ||\nabla u||^p_{L^p}$ Une telle suite existe bien par définition de la borne inf.

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach réflexif et séparable : ils héritent, à cet effet, assez naturellement de la complétude et de la séparabilité des espaces L^p. La réflexivité provient du fait que $L^{p'} = L^q$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et symétriquement, $L^{p''} = L^{q'}$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc $L^{p''} = L^p$.

Puisque F est coercive par la proposition 4.1, on peut majorer la suite u_n uniformément :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } ||u_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant M.$$

Par les théorèmes 3.4 et 3.5 on peut donc utiliser la compacité faible de l'ensemble convexe K défini par

$$K := \left\{ u \in E \text{ tel que } ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant M \right\}.$$

Quitte à prendre une sous-suite, on écrit que $u_n \rightharpoonup u_\infty$.

D'où l'on tire

$$F(u_\infty) \leqslant \liminf F(u_n).$$

car F est sci pour la topologie faible.

□

4.2 Équation d'Euler-Lagrange associée.

Cette section n'est pas très importante, car on ne va pas donner de principe du maximum : elle peut être vue comme une fantaisie. Elle généralise tout de même le cas $W^{1,1}(\omega)$.

On veut dériver $||\nabla u||_{L^p}^p = \sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p$ par rapport à u.

On va estimer l'équation d'Euler-Lagrange, sans la dérivée au sens propre mais seulement formellement, en approximant $|\nabla u|^p$ par $(|\nabla u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}}$, qui est dérivable si $\varepsilon > 0$.

Si $\varphi(x) = (x^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}}$ on a que

$$\varphi'(x) = \frac{px(\sqrt{x^2+\varepsilon})^{p-1}}{\sqrt{x^2+\varepsilon}}.$$

On le développement limité suivant au voisinage de 0 :

$$|\nabla(u+h)| = |\nabla u| \left(1 + \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|^2} + o(h)\right).$$

Par un nouveau développement limité de φ, au voisinage de $|\nabla u|$

$$\varphi(|\nabla(u+h)|) = \varphi(|\nabla u|) + \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|) + o(h).$$

D'où :

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u+h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) + \int_\Omega \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|) + o(h)\ ,$$

On écrit donc :

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u+h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) - \int_\Omega h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|)\right) + o(h).$$

Ou encore

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u+h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) - p\int_\Omega h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u(\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon})^{p-1}}{\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon}}\right) + o(h).$$

Donc $\dfrac{\partial ||\nabla u||_p^p}{\partial u} = -p\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u(\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon})^{p-1}}{\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon}}\right)$..

5 Cas de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$.

Ici peu de preuve vont subsister par rapport aux cas précédent. On peut tout de même voir pourquoi, et calculer l'équation d'Euler-Lagrange, ce qui nous facilitera le travail pour le cas BV.

5.1 Perte et nécessité de la réflexivité.

On sait que $L^1(\Omega)$ n'est pas un espace réflexif. On montre ici par contre-exemple que la réflexivité était un argument essentiel pour montrer l'existence du minimum : on donne ici une fonctionnelle qui n'en a pas.

On pose le problème suivant :

$$F(x_0) = \inf_{u \in W^{1,1}([0,1])} F(u) \text{ avec } u(0) = 0 \ , \ u(1) = 1 \ , \tag{8}$$

avec $F(u) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx$.

F est convexe et coercive pour la norme $||.||_{W^{1,1}([0,1])}$, car $\sqrt{u^2+u'^2} \geqslant \dfrac{|u|+|u'|}{2}$.

Montrons que l'inf m du problème (8) vaut 1. En peut déduire des inégalités suivantes

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2+u'^2}\, dx \geqslant \int_0^1 |u'|\, dx \geqslant \int_0^1 u'\, dx = 1$$

que $m \geqslant 1$.

On définit la suite u_n de la façon suivante :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right] \\ 1+n(x-1) & \text{si } x \in \left[1-\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

On peut montrer que $F(u_n) \to 1$. Donc $m = 1$.

En effet

$$F(u_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{(1+n(x-1))^2 + n^2}\, dx \ ,$$

en développant et factorisant :

$$F(u_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{\left(nx+(1-n)\right)^2 - n^2}\, dx.$$

Avec les changements de variable appropriés :

$$F(u_n) = -n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(2y)-1}{2}\, dy.$$

Dont on peut calculer par primitive :

$$F(u_n) = n\frac{\sin(\frac{2}{n})}{4} + n\frac{1}{2n} \ ,$$

ce qui tend bien vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrons qu'il n'existe pas de minimum pour la fonctionnelle F. S'il en existait un, notons le u. On aurait :

$$1 = F(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2+u'^2}\, dx \geqslant \int_0^1 |u'|\, dx \geqslant \int_0^1 u'\, dx = 1 \ ,$$

à cause des conditions au bord. Mais dans ce cas les termes intermédiaires de l'inégalité valent tous 1. Donc en particulier $\int_0^1 \sqrt{u^2+u'^2}\, dx = \int_0^1 |u'|\, dx$. Ce qui n'est possible que si $u \equiv 0$, ce qui ne satisfait pas les conditions au bord. Donc il n'existe pas de fonction de $W^{1,1}(\Omega)$ réalisant le minimum de la fonctionnelle F.

5.2 Équation d'Euler-Lagrange associée.

On cherche à caractériser un minimum de la fonctionnelle

$$F(u) = ||u - f||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^1(\Omega)} ,$$

dans le cas où on ferait l'hypothèse raisonnable qu'il existe un minimum à cette fonctionnelle.

On va donner une heuristique de preuve. Approximons [9] à cet effet $|\nabla u|$ par $\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}$ et dérivons cette expression. Si $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ on a que

$$\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

Calculons $|\nabla(u + h)|^2 = |\nabla u|^2 + 2\nabla u.\nabla h + o(h)$. Donc $|\nabla(u + h)| = \sqrt{|\nabla(u + h)|^2} = \sqrt{|\nabla u|^2 + 2\nabla u.\nabla h + o(h)}$. En factorisant :

$$|\nabla(u + h)| = |\nabla u|\sqrt{1 + \frac{2\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|^2} + o(h)}.$$

Puis, par un développement limité au voisinage de 0 :

$$|\nabla(u + h)| = |\nabla u| \left(1 + \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|^2} + o(h)\right).$$

Au final :

$$|\nabla(u + h)| - |\nabla u| = \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|} + o(h).$$

Par un nouveau développement limité de φ, au voisinage de $|\nabla u|$

$$\varphi(|\nabla(u + h)|) = \varphi(|\nabla u|) + \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|) + o(h).$$

D'où :

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u + h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) + \int_\Omega \frac{\nabla u.\nabla h}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|) + o(h) ,$$

On écrit donc :

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u + h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) - \int_\Omega h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\varphi'(|\nabla u|)\right) + o(h).$$

Ou encore

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla(u + h)|) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) - \int_\Omega h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}}\right) + o(h).$$

Donc

$$\frac{\partial ||\nabla u||_1}{\partial u} \simeq \frac{\int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}}{\partial u} = -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{||\nabla u||_1^2 + \varepsilon^2}}\right).$$

9. Et cela à un sens extrêmement important pour les applications numériques : en effet, dans le cas d'une résolution par une approche à point fixe (descente de gradient), il nous faut une fonctionnelle dérivable et c'est celle-ci que nous choisirons pour résoudre effectivement.

6 L'espace BV.

Les preuves pourront sembler ressemblantes avec les preuve du cas $W^{1,p}(\Omega)$. Néanmoins le cadre théorique est nettement différent. Cela permet tout de même de voir que les arguments qui permettent la minimisation sont essentiellement les mêmes depuis le cas $\mathbb{R}^n$: il faut trouver une fonction bornée dans un espace compact !

6.1 Définitions et topologie.

Ω désigne toujours un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6.1 (Variation totale.)**.** Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. On pose

$$\int_\Omega |Du| := \sup \left\{ \int_\Omega u \mathrm{div} \varphi \, dx \text{ tel que } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \ , \ ||\varphi_i||_{L^\infty} \leqslant 1 \ , \ i = 1, 2 \right\} \ ,$$

où $\mathrm{div}\varphi = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}$.

On notera dans la suite $J(u) = \int_\Omega |Du|$.

On va s'intéresser dans cette partie au problème suivant :

$$F(u_0) = \inf_{u \in BV(\Omega)} ||u - f||_2^2 + J(u) \tag{9}$$

On définit naturellement l'espace maximal sur lequel la fonctionnelle est définie.

Définition 6.2 (Espace $BV(\Omega)$.)**.** On définit l'espace des fonctions à variations bornées, l'espace :

$$BV(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega |Du| < \infty \right\}.$$

Exemple : 6.3 (intéressant !)**.** *Soit $u \in L^1(\Omega)$ définie sur $[-1, 1]$ telle que :*

$$u = \begin{cases} -1 & si \ x \in [-1, 0[\ , \\ 1 & si \ x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Alors si $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ alors $\displaystyle\int_{-1}^1 u\varphi' \, dx = -2\varphi(0)$. Et donc $\displaystyle\int_{-1}^1 |Du| \, dx = 2$ car $||1||_\infty = 1$. Finalement $u \in BV(\Omega)$.

Ce qui nous donne une propriété importante de l'espace BV : les fonctions à variations bornées peuvent admettre des sauts, ce qui n'est pas le cas des fonctions des espaces de Sobolev qui ne peuvent admettre des discontinuités. Ainsi les fonctions de l'espace BV sont intéressantes pour modéliser des images qui contiennent des contours (des discontinuités.) Dans le cas présent, $u \notin W^{1,2}(\Omega)$ car la dérivée de u, au sens des distributions est égale à $2\delta_0$ qui n'est pas représentable pas une fonction de $L^2(\Omega)$.

Proposition 6.4 (Convexité de la fonctionnelle.)**.** *La fonctionnelle*

$$F(u) = ||u - f||_2^2 + J(u)$$

est strictement convexe.

Démonstration. Évidente.

□

Vis à vis de la semi-continuité inférieure, on conserve de bonnes propriétés :

Proposition 6.5 (Semi-continuité inférieure.)**.** *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $BV(\Omega)$ et lorsque $n \to +\infty$,*

$$u_n \to u$$

dans $L^1(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega |Du| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

Ici encore, on est obligé de changer notre topologie pour obtenir des propriétés de compacité.

Proposition 6.6 (Une topologie faible-$*$.)**.** *Muni de la norme* $|u|_{BV(\Omega)} = |u|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du|$, *l'espace* BV *est un espace de Banach. Néanmoins, il n'a pas de bonnes propriétés de compacité. On muni donc* $BV(\Omega)$ *de la topologie faible-$*$. On dit que* u_n *converge faiblement-$*$ dans* BV *et l'on note*

$$u_n \xrightarrow[BV-*]{} u$$

si $u_n \xrightarrow[L^1(\Omega)]{} u$ *et* $Du_n \xrightarrow[M]{} Du$.

Où $Du_n \xrightarrow[M]{} Du$ *signifie que* $\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$$\int_\Omega Du_n \varphi \to \int_\Omega Du\varphi.$$

On conserve de bonnes propriétés d'inclusion compactes, lesquelles avaient été nécessaires auparavant et le resteront dans la suite.

Proposition 6.7 (Propriété de compacité.)**.** *Toute suite* u_n *bornée dans l'espace* BV *admet une sous-suite convergente dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leqslant p < \frac{N}{N-1}$, $N \geqslant 1$.

6.2 Méthode.

Globalement la méthode précédemment employée va être copiée dans ses grandes lignes. Seuls les arguments techniques diffèrent des précédant cas.

Proposition 6.8. *La fonctionnelle*

$$F(u) = ||u - f||_2^2 + J(u)$$

admet une unique solution.

Démonstration. L'unicité de la solution provient de la stricte convexité.

Démontrons l'existence : Considérons une suite minimisante. Soit donc u_n une suite telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_\infty$ et

$$F(u_\infty) = \inf_{u \in BV(\Omega)} F(u).$$

On montre que u_n est uniformément bornée : $u_n \leqslant M$. En effet, en posant que $F(u_n) \leqslant M$, il vient que

$$||u_n - f||_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_n) \leqslant M \ ,$$

donc $F(u_n) < M_1$ et $||u - f||_{L^2(\Omega)}^2 < M_2$ car les deux termes sont positifs. En écrivant

$$||u_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||u_n - f||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)} \text{ par inégalité triangulaire,}$$

on obtient donc $||u_n||_{L^2(\Omega)} \leqslant M$.

Ainsi par la proposition 6.7, il vient que u_n admet une sous-suite convergente dans $L^1(\Omega)$ et faiblement-$*$ dans $BV(\Omega)$.

Par semi-continuité inférieure de $J(u)$ (proposition 6.6) on a :

$$F(u_\infty) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

On a donc exhibé u_∞, qui est minimum de la fonctionnelle F.

□

6.3 Formule de la coaire et principe du maximum.

On obtient encore une fois un principe du maximum. Pour cela on a besoin de la formule de la coaire, afin de mettre en place une méthode par troncature.

Définition 6.9 (Périmètre.)**.** Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ On définit le périmètre de E dans Ω par la variation totale de l'indicatrice de E :

$$P(E,\Omega) := \sup \left\{ \int_E \mathrm{div}\varphi \, dx \text{ tel que } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}^1_0(\Omega) \text{ , } ||\varphi_i||_{L^\infty} \leqslant 1 \text{ , } i = 1,2 \right\}.$$

On dit que E est de périmètre fini si $P(E,\Omega) < \infty$.

Remarque *:* 6.10. De cette définition on tire cette conséquence pratique de façon immédiate : si on a une image binaire la variation totale de cette image sera égale au périmètre de l'objet représenté par des 1 sur fond de 0.

Ce qui ce généralise par la formule de la coaire :

Théorème 6.11 (Formule de la coaire.)**.** *Soit $u \in BV(\Omega)$, on a la formule :*

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\{x \in \Omega \textit{ tel que } u(x) > t\}\right) dt.$$

Une conséquence directe de ce théorème nous sera très utile pour montrer le principe du maximum pour la solution du problème de minimisation.

Proposition 6.12. *Soit $u \in BV(\Omega)$, et on pose $v := \min(u, M)$, alors on a*

$$J(v) \leqslant J(u).$$

Démonstration. On écrit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\{x \in \Omega \text{ tel que } v(x) > t\}\right) dt \text{ par le théorème précédent.} \\ &= \int_{-\infty}^{M} P\left(\{x \in \Omega \text{ tel que } v(x) > t\}\right) dt \text{ car } \mu\left(\{x \in \Omega \text{ tel que } v(x) \geqslant t\}\right) = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{M} P\left(\{x \in \Omega \text{ tel que } u(x) > t\}\right) dt \text{ car } v = \inf(u, M) = u \text{ si } t < M \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\{x \in \Omega \text{ tel que } u(x) > t\}\right) dt \text{ car } P \geqslant 0 \text{ comme variation totale.} \\ &= J(u). \end{aligned}$$

□

Vient donc, comme annoncé, le principe du maximum :

Théorème 6.13 (Principe du maximum.)**.** *Soit $f \in L^\infty$, et soit u la solution de (9). On a le principe du maximum suivant :*

$$\inf_\Omega f \leqslant u \leqslant \sup_\Omega f.$$

Démonstration. Supposons que u est solution du problème (9).

Remarquons que la fonction $x \mapsto (x-a)^2$ est croissante sur $[a, +\infty[$. Ainsi si $M \geqslant a$ on a

$$(\min(x, M) - a)^2 = \begin{cases} (x-a)^2 \text{ si } x \leqslant M \\ (M-a)^2 \leqslant (x-a)^2 \text{ si } x \geqslant M. \end{cases}$$

Dans tout les cas :

$$(\min(x, M) - a)^2 \leqslant (x-a)^2.$$

On pose maintenant $M = \sup_\Omega f$, on a alors $M \geqslant f$, et donc on obtient alors :

$$\int_\Omega (\min(u, M) - f)^2 \leqslant \int_\Omega (u - f)^2.$$

Par la proposition ci-dessus, on a que $J(\min(u, M)) \leqslant J(u)$. Et donc en posant $\tilde{u} := \min(u, M)$, on a que $\tilde{u}$ est solution du problème (9).

On termine le raisonnement par contraposée : supposons que $u > \sup_\Omega f$, alors $\tilde{u} = \sup_\Omega f < u$ et donc u n'est pas un minimum, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc $u \leqslant \sup_\Omega f$.

La deuxième inégalité s'obtient en faisant le même raisonnement avec $-u$. □

6.4 Équation d'Euler-Lagrange.

On terminera le volet théorique de ce projet par l'équation d'Euler Lagrange associée à la fonctionnelle définie sur l'espace $BV(\Omega)$. On ne fera pas d'étude théorique précise de cette équation d'Euler, mais seulement une heuristique formelle dans le où le gradient est une fonction [10] de $L^1(\Omega)$ et non une mesure.

On doit dériver par rapport à u

$$||Au - f||_2^2 + \int_\Omega |\nabla_u(\omega)| \ ,$$

où

$$|\nabla u| = \sqrt{\nabla_x u(\omega)^2 + \nabla_y u(\omega)^2}.$$

On approxime pour cela

$$\int_\Omega \sqrt{\nabla_x u(\omega)^2 + \nabla_y u(\omega)^2} \simeq \int_\Omega \sqrt{\nabla_x u(\omega)^2 + \nabla_y u(\omega)^2 + \varepsilon^2} \ ,$$

avec $\varepsilon > 0$.

Ce que l'on a déjà calculé à la Section 5.2 :

Donc

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} \simeq \frac{\int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}}{\partial u} = -\text{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{||\nabla u||_1^2 + \varepsilon^2}}\right).$$

Donc l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (9) est formellement :

$$0 = 2u - 2f - \text{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{||\nabla u||_1^2 + \varepsilon^2}}\right).$$

10. Au sens des distribution.

7 Étude comparative des résultats numériques de chacun des cas.

Dans cette dernière section nous allons présenter les résultats effectifs que l'on peut obtenir lorsque l'on minimise effectivement ces fonctionnelles. Les résultats présentés proviennent des algorithmes étudiés en stage dans [10]. Il s'agit d'algorithmes de type «point fixe». Pour la minimisation, on a utilisé des algorithmes de type itératif à point fixe : des descentes de gradient pour $W^{1,2}(\Omega)$ et $W^{1,1}(\Omega)$ [11], et un Forward-Backward pour $BV(\Omega)$.

Figure 1 – Image originale (Ava Gardner.)

Figure 2 – Image masquée à 75%.

11. On s'est servi ici de l'approximation de l'équation d'Euler-Lagrange pour le cas $W^{1,1}(\Omega)$.

Figure 3 – Solution du cas $W^{1,2}(\Omega)$.

Figure 4 – Solution du cas $W^{1,1}(\Omega)$.

Figure 5 – Solution du cas $BV(\Omega)$.

On remarque les points suivants : les contours, qu'il s'agisse de $W^{1,2}(\Omega)$ ou $W^{1,1}(\Omega)$ sont dégradés, floutés. Il s'agit d'une propriété que l'on a mentionné en remarque (6.3) : l'espace BV contient des fonctions qui ont des sauts, tandis que ce n'est pas le cas de $W^{1,2}(\Omega)$ et $W^{1,1}(\Omega)$. Notons tout de même que pour le cas $W^{1,2}(\Omega)$ il y a plus de floutage que pour le cas $W^{1,1}(\Omega)$: cela s'explique comme suit. Les fonctions de $W^{1,2}(\Omega)$ ont leurs dérivées qui sont des distributions représentées par une fonction de $L^2(\Omega)$ tandis que les fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ ont leurs dérivées au sens des distributions qui sont représentées par des fonctions de $L^1(\Omega)$. Mais comme nous somme sur un ouvert borné, il y a inclusion des premières dans les deuxièmes, ce qui signifie que les fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ peuvent admettre avec plus de facilité des éventuelles irrégularités, ne serait-ce qu'à l'ordre 1.

Finalement, les images naturelles contenant des contours, il est donc mathématiquement normal que l'espace BV soit mieux adapté pour éviter les phénomènes de floutage. Et cela se confirme concrètement.

8 Conclusion.

Sans aucune surprise, le projet s'est très bien déroulé. On a pu étudier le cadre théorique du stage de mai 2012, i.e. le cadre simple de $\mathbb{R}^n$. On s'est également plongé dans l'étude des espaces de Sobolev, et fait le lien, dans le cas $W^{1,2}(\Omega)$, avec les EDP. On a privilégié l'approche minimisation de fonctionnelles vers EDP plutôt que l'inverse, ce qui aurait été basé sur le principe de Dirichlet (voir [3] page 176.) On a abordé la question des EDP pour l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ en particulier, et sans avoir eu le temps de se poser la question pour autres espaces. Il aurait été intéressant de voir cela pour l'espace BV pour lequel il n'existe pas de dérivation mais seulement une sous-différentiation.

On a vu l'intérêt de diminuer ou d'augmenter la taille des espaces, de se placer sur d'autres topologies, d'obtenir des propriétés de compacité (injections compactes, propriétés de majoration des suites, etc.). Cela permet de mettre en œuvre et d'étudier des applications aux nombreux théorèmes d'analyse fonctionnelle, de théorie des distributions et de topologie étudiés durant mon premier Master. Cela m'a permis d'obtenir un certain recul. Lors de la fin du projet, une vision plus reculée de l'ensemble du travail m'a permis de voir ces différents espaces comme un outil qualificatif pour interpréter les propriétés de ces différents espaces en terme mathématique et de voir l'intérêt lors de travail numérique effectif, l'utilité de la sélection du bon critère en fonction de ce que l'on recherche comme type d'image : texture, aspect global ou contour.

Les difficultés théoriques se sont articulées en trois étapes essentielles. Dans un premier temps, les espaces de Sobolev, dont la topologie faible était un peu difficile à manier. Cette partie théorique a été étudiée dans le livre de Brézis [3]. Ensuite la difficulté est venue de l'espace $W^{1,2}([0,T], W^{1,2}(\Omega))$ pour interpoler, espace duquel je ne connaissait rien et dont j'ai étudié le propriété dans [6]. Enfin j'ai essayé de comprendre un peu l'espace BV, au moins dans les grandes lignes, et comprendre les enjeux des théorèmes cités à partir de [7] afin de faire la preuve finale.

On n'a hélas pas eu le temps d'aborder l'aspect purement EDP. En effet, on a travaillé ici sur des EDP dérivant de caractérisations de minimum de fonctionnelles. Or il existe des problèmes purement EDP, i.e. des problèmes ayant une formalisation EDP et pas de formalisation en terme de fonctionnelles. Par exemple les filtres de choc, ce que j'essayerai d'étudier plus tard en regardant l'article [13]. On n'a pas non plus eu le temps d'aborder plus de théorie sur l'espace BV, par manque de temps, la théorie régissant cet espace demandant un certain recul. Je n'ai pas non plus eu le temps de vérifier proprement que le périmètre défini dans la Section 6.3 coïncide bien avec le périmètre habituel des courbes lisses du plan. Il s'agirait essentiellement de bien comprendre la formule de Green-Ostrogradky (je verrai pour cela le livre d'Alain Yger, *Analyse complexe et distribution* page 89.)

En relisant le début de ce rapport, dont la rédaction fut entreprise dès octobre, j'ai trouvé une certaine lacune à ma rédaction, preuve agréable que ce projet m'a sans doute marqué, dans le bon sens, j'espère !

A Preuves des lemmes de la section (3.4.2).

Lemme A.1. *Soit $T > 0$ fixé, $\exists C > 0$, qui ne dépend pas de δ_t tel que :*

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}_{\delta_t}}{\partial t} \right\|_2^2 \leqslant C.$$

Démonstration. Posons $N = \lfloor \frac{T}{\delta_t} \rfloor$. Remarquons grâce à (1) de la Section 2

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 & \leqslant \delta_t \int_\Omega \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta_t} \right|^2 \\ & \leqslant \delta_t \frac{\delta_t}{\delta_t^2} (||u_n - f||_2^2 - ||u_{n+1} - f||_2^2 + ||\nabla u_n||_2^2 - \nabla u_{n+1}||_2^2). \end{aligned}$$

En utilisant Chasles, on va minorer globalement :

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 + \int_{t_N}^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2.$$

donc

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 \leqslant (||u_0 - f||_2^2 - ||u_N - f||_2^2 + ||\nabla u_0||_2^2 - \nabla u_N||_2^2) + \int_{t_N}^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2.$$

Mais

$$\int_{t_N}^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 \leqslant ||u_N - f||_2^2 - ||u_{N+1} - f||_2^2 + ||\nabla u_N||_2^2 - \nabla u_{N+1}||_2^2 \ ,$$

par positivité.
D'où :

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 \leqslant ||u_0 - f||_2^2 - ||u_{N+1} - f||_2^2 + ||\nabla u_0||_2^2 - \nabla u_{N+1}||_2^2.$$

□

Lemme A.2. *Soit $T > 0$ fixé,*

$$\lim_{\delta_t \to 0} \int_0^T ||\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}||_2^2 \, dt = 0.$$

Démonstration. Posons $N = \lfloor \frac{T}{\delta_t} \rfloor$.
On peut encore utiliser Chasles, pour écrire

$$\int_0^T \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \ dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \ dt + \int_{t_N}^T \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \ dt.$$

Mais

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \ dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(t - t_n - \delta_t)(u_{n+1} - u_n)\|_2^2 \ dt.$$

Et lorsque $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$, $0 \leqslant \left| \frac{t - t_n - \delta_t}{\delta_t} \right| \leqslant 1$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \ dt & \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \delta_t \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_2^2 \ dt \\ & \leqslant \delta_t^2 C. \end{aligned}$$

On a la même majoration et convergence pour

$$\int_{t_N}^{T} \|\hat{u}_{\delta_t} - \tilde{u}_{\delta_t}\|_2^2 \, dt.$$

□

Lemme A.3. *On a les principes du maximum suivants : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$m \leqslant \tilde{u}, \hat{u} \leqslant M.$$

Démonstration. Puisque $\tilde{u}$ résout la même équation différentielle que u, alors elle suit le même principe du maximum (preuve déjà vue en théorème (3.13)). De plus, $\tilde{u}$ et $\hat{u}$ ont les mêmes maximums, la deuxième inégalité est vraie.

□

Lemme A.4. *La suite ∇u_n est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. En utilisant l'inégalité déjà utilisée $F(u_{n+1}, u_n) \leqslant F(u_n, u_n)$, on écrit :

$$\delta_t \left(||\nabla u_{n+1}||_2^2 - ||\nabla u_n||_2^2 + ||u_{n+1} - f||_2^2 - ||u_n - f||_2^2 \right) + ||u_{n+1} - u_n||_2^2 \leqslant 0.$$

En sommant sur n, il vient :

$$\delta_t \left(||\nabla u_N||_2^2 - ||\nabla u_0||_2^2 + ||u_N - f||_2^2 - ||u_0 - f||_2^2 \right) + \sum_{n=0}^{N-1} ||u_{n+1} - u_n||_2^2 \leqslant 0.$$

D'où

$$||\nabla u_N||_2^2 \leqslant ||\nabla u_0||_2^2 + ||u_0 - f||_2^2 - ||u_N - f||_2^2 \; ,$$

donc

$$||\nabla u_N||_2^2 \leqslant ||\nabla u_0||_2^2 + ||u_0 - f||_2^2.$$

□

Corollaire A.5. *On a les inégalités suivantes :*

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_0^t ||\nabla \tilde{u}_{\delta_t}(s, x)||^2 \, ds < C. \tag{10}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_0^t ||\nabla \hat{u}_{\delta_t}(s, x)||^2 \, ds < C. \tag{11}$$

B Codes Matlab

Ces codes ont été directement copiés sur [10].

```
%% Inpainting.

% L2

clc, clear all, close all

load ava

d=85;
[u,v]=size(Im);
NM=u*v;
P=randperm(NM);
Mask=ones(size(Im));
indices=P(floor(d*NM/100)+1:end);
Mask(P(1:floor(d*NM/100)))=0;
Data = Mask.* Im;

figure
imagesc(Data)
axis square
axis off
colormap gray

figure
D=[0 -1 0;
    -1 4 -1;
    0 -1 0];
I=descente2(Data,Mask,D,10000,1/200,1,Data);
I=descente2(I,Mask,D,10000,1/500,1,Data);
I=descente2(I,Mask,D,10000,1/1000,1,Data);

imagesc(I)
axis square
colormap gray
axis off

% L2-L1. impainting.

figure
D=[0 -1 0;
    -1 4 -1;
    0 -1 0];

tic
I2=descente4(Data,Mask,D,300,1/10,2000,Data,10);
I2=descente4(I2,Mask,D,300,1/20,2000,Data,10);
I2=descente4(I2,Mask,D,100,1/30,2000,Data,10);
I2=descente4(I2,Mask,D,600,1/50,2000,Data,10);
toc

imagesc(I2)
axis square
axis off
colormap gray

% Forward-Backward, impainting.

sigma=30;
Data=Im.*Mask;

figure
imagesc(Data)
axis square
colormap gray

tic
```

```
I3=inpainting_chambolleFB(Data,100,sigma,30,Mask);
toc

figure
imagesc(Im)
axis square
colormap gray

figure
imagesc(I3)
axis square
colormap gray

%%
imwrite(uint8(adjust(I)),'w12.png','PNG')
imwrite(uint8(adjust(I2)),'w11.png','PNG')
imwrite(uint8(adjust(I3)),'bv.png','PNG')
imwrite(uint8(adjust(Im)),'orig.png','PNG')
imwrite(uint8(adjust(Data)),'mask.png','PNG')
```

```
function Im=descente2(ImInit, T, D, N, param,lambda,data)

Im=ImInit;
dt=rot90(D,2);

for itt=1:N
    Im=Im-param*GradientDT2(Im,D,T,lambda,data);
end

end
```

```
function Im=descente4(ImInit, T, D, N, param,lambda,data,epsilon)

Im=ImInit;

for itt=1:N
    Im=Im-param*GradientDT4(Im,D,T,lambda,data,epsilon);
end

end
```

```
function Im=chambolle_simple( N,lambda,g)
%function Im=chambolle( N,lambda,g)
tau=1/5;
Im1=zeros(size(g));
Im2=zeros(size(g));

%Iterations de l'agorithme de Chambolle.
for itt=1:N
    [G1,G2]=gradient_chambolle(divergence_chambolle(Im1,Im2)-g/lambda);
    G=sqrt(G1.^2+G2.^2);
    Im1=(Im1+tau*G1)./(1+tau*G);
    Im2=(Im2+tau*G2)./(1+tau*G);
end

Im=g-lambda*divergence_chambolle(Im1,Im2);

end
```

```
function [v] = inpainting_chambolleFB( g , N, sigma,iterations_gradient,mask)
% function [v]=inpainting_chambolleFB( g , N, sigma,iterations_gradient,mask)

lambda=sigma/4;
v=zeros(size(g));
```

```
for itt=1:N
    v=g.*mask+(1-mask).*v;%v+mask.*(g-v)
    v=chambolle_simple(iterations_gradient,lambda,v);
end

end
```

```
function g=GradientDT2(Im,D,T,lambda,data)

dt=rot90(D,2);
Tt=1-T;
g=2*lambda*filter2(dt,filter2(D,Im))-T.*(2*data-(T.*Im));

end
```

```
function g=GradientDT4(Im,D,T,lambda,data,epsilon)

dt=rot90(D,2);
g=2*lambda*filter2(dt,filter2(D,Im))./ ...
    (2*sqrt(norm(filter2(D,Im),2).^2+epsilon)) ...
    -(T.*(2*data-(T.*Im)));

end
```

```
function D = divergence_chambolle( G1,G2 )
% calcule la divergence del'image (G1,G2)

 [u,v]=size(G1);

 GG1=zeros(u,v);
 GG1(1,:)=G1(1,:);
 GG1(u,:)=-G1(u-1,:);
 GG1(2:u-1,:)=G1(2:u-1,:)-G1(1:u-2,:);

 GG2=zeros(u,v);
 GG2(:,1)=G2(:,1);
 GG2(:,v)=-G2(:,v-1);
 GG2(:,2:v-1)=G2(:,2:v-1)-G2(:,1:v-2);

 D=GG1+GG2;
end
```

```
function [G1,G2] = gradient_chambolle( D )
%function [G1,G2] = gradient( D )
%retourne le gradient de D
[u,v]=size(D);
G1=zeros(u,v);
G2=zeros(u,v);
G2(:,1:v-1)=D(:,2:v)-D(:,1:v-1);
G1(1:u-1,:)=D(2:u,:)-D(1:u-1,:);

end
```

```
function B = adjust( A )
% Effectue un scaling de l'image.

m=min(A(:));
M=max(A(:));
B=(A-m)/(M-m)*256;

end
```

Références

[1] Jean-François Aujol, *Calculus of variations in image processing.* (Notes de cours de Master), 2008.

[2] Claude Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod

[3] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle et applications*, Dunod, 2005

[4] Kolmogorov, Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* , Mir Moscou-Ellipse, 1994.

[5] Zuily Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* , Dunod, 2007.

[6] Roger Temam, *Navier-Stokes equation* , North-Holland, 1984.

[7] Gilles Aubert, Pierre Kornprobst, *Mathématical Problems in Image Processing* , Springer, 2002.

[8] Gilles Aubert et Jean-François Aujol, *A variationnal approach to remove multiplicative noise*, SIAM Journal of Applied mathematics, 2008.

[9] PG Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 2006.

[10] Fabien PIERRE, *Optimisation pour les méthodes variationnelle appliquées au traitement d'image. Rapport de stage*, 2012.

[11] Jean Alexandre Dieudonné, *Les fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, 1972.

[12] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Claude Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization algorithms 1*, Springer-Verlag, 1993.

[13] Stanley Osher ; Leonid I. Rudin, *Feature-Oriented Image Enhancement Using Shock Filters*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1990.

Table des figures