Les théorèmes d'existence.

PIERRE Fabien

Ce mémoire est grandement inspiré de l'ouvrage de Jean Alexandre Dieudonné, "Les fondements de l'analyse moderne". Il a pour but de montrer les principaux théorèmes d'existence basés sur le calcul différentiel. Le cadre sera celui des espaces de Banach de dimension finie. La complétude permettant à une série absolument convergente d'être convergente, cela permettra dans un premier temps de montrer un théorème abstrait sur l'existence d'une solution à une équation fonctionnelle donnée dans le cadre restrictif des applications lipschitziennes et dans des ouverts particuliers. De ce théorèmes nous tirerons des résultats tels que le théorème des fonctions implicites. Nous aurions pu mentionner les théorèmes sur l'existence de solutions aux équations différentielles, mais nous avons préféré approfondir par des exemples simples, l'application de ces théorèmes. Enfin, nous traiterons des applications du théorème des fonctions implicites dans le domaine qui leur est le plus fertile, la géométrie différentielle. Nous démontrerons, le théorème des extrémas liés et nous mentionnerons le théorème des variétés lisses.

REMERCIEMENTS :

Je tiens à remercier ici M. Sebbar pour son aide quant au mémoire et la qualité de ses cours tout au long de cette année de préparation au concours de l'agrégation. Je remercie également M. Matignon pour les dispositions prises afin de passer l'agrégation à la fin de cette année.

Table des matières

1 Le théorème principal.

Théorème 1 (La méthode des approximations successives.)
Soient E et F deux espaces de Banach, $U := B(0, \alpha) \subset E$ et $V := B(0, \beta) \subset F$,

v application de $U \times V$ dans F, continue, telle que $\|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|$, $\forall x \in U$ pour $0 \leqslant k < 1$.

Ainsi $v(x, 0) \leqslant \beta(1 - k)$ implique $\exists f : U \to V$, continue, telle que

$$f(x) = v(x, f(x)) \ , \forall x \in U$$

.

Preuve Construction d'une suite approchant de f dans V. Par récurence :

$$y_0 := 0$$
$$y_n := v(x, y_{n-1}), \ \forall n \geqslant 1$$

Supposons (HR) que $y_k \in V$, $\forall k < n$ et montrons que $y_n \in V$. Puisque v est k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable et que

$$y_p - y_{p-1} = v(x, y_{p-1}) - v(x, y_{p-2})$$

ainsi

$$\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k\|y_{p-1} - y_{p-2}\| \tag{1}$$

Par récurence :

$$\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k^{p-1}\|y_1 - y_0\| = k^{p-1}\|y_1\|$$

En itérant et en sommant :

$$\|y_p\| = \|y_p - y_{p-1} + y_{p-1} - y_{p-2}, \ldots, y_1 - y_0\| \leqslant (1 + k + k^2, \ldots, k^{p-1})\|y_1\| \leqslant \frac{\|y_1\|}{1-k} < \beta$$

d'où $y_n \in V$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Comme $y_1 = v(x, 0)$ et que v est continue, que $y_{n+1} = v(x, y_n)$ et que la composée de deux fonctions continues est une fonction continue, alors, par récurrence, y_n est une fonction continue de x, que nous notons $f_n(x)$.

Par (1) on a : $\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leqslant k^{n-1}\|y_1\| = k^{n-1}\beta(1-k)$ pour $x \in U$. Ainsi la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ est normalement convergente. Ainsi donc la limite de cette série (f), qui est la limite de f_n, est continue. De plus en passant à la limite :

$$\|y_p\| \leqslant \frac{\|y_1\|}{1-k} < \beta,$$

on obtient : $f(x) \in V$, $\forall x \in U$. De plus en passant à la limite en $n \to \infty$ dans $f_{n+1}(x) = v(x, f_n(x))$, on a $f(x) = v(x, f(x))$, $\forall x \in U$.

Ne reste plus qu'à déterminer l'unicité de la fonction f : Soit g une fonction continue telle que : $g(x) = v(x, f(x))$. On a alors :

$$\|f(x) - g(x)\| = \|v(x, f(x) - g(x))\| \leqslant k\|f(x) - g(x)\|$$

d'où $f = g$ sur U, car $k < 1$.

2 Premières applications.

Théorème 2 (Théorème du point fixe.)
Soient F un espace de Banach, $V := B(y_0, \beta)$, $v : V \to F$ tels que $\|v(y_1) - v(y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in V$, où k est une constante telle que $0 \leqslant k < 1$, de plus $\|v(y_0) - y_0\| < \beta(1-k)$;

Alors il existe un unique z, tel que $v(z) = z$.

Preuve Tout d'abord, v est continue dans V car elle est $k-$lipschitzienne. Considérons

$$\psi : (x, y) \mapsto v(y + y_0) - y_0.$$

Et on applique le théorème des approximations successives, ainsi il existe une unique f telle que

$$f(x) = \psi(x, f(x))$$

i.e.

$$f(x) = v(f(x) + y_0) - y_0$$

autrement dit :

$$f(x) + y_0 = v(f(x) + y_0)$$

De plus le point fixe est unique. On prend pour cela deux points fixes z et z' et on écrit :

$$\|z - z'\| = \|v(z) - v(z')\| \leqslant k\|z - z'\|$$

D'où que $z = z'$ car $k < 1$.

Théorème 3 (Théorème de l'application ouverte.)
Soit F un espace de Banach,

$V := B(0, \beta) \subset F$,

$w : V \to F$, telle que $\|w(y_1) - w(y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in V$, k est une constante telle que $0 \leqslant k < 1$,

Supposons : $\|w(0)\| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$

Posons : $g : y \mapsto y + w(y)$.

Alors $\exists W \subset V$ voisinage de 0, telle que la restriction de g soit un homéomorphisme de W sur un voisinage ouvert de 0 (dans F).

Preuve On applique 1 dans le cas ou $E = F$, $U = B(0, \alpha$ avec $\alpha = \beta(1-k) - \|w(0)\|$, et $v(x,y) = x - w(y)$. Il existe donc une application continue f telle que

$$f(x) = x - w(f(x))$$

ou

$$g(f(x)) = x,$$

f est donc une application continue de U dans $f(U)$, surjective par définition de $f(U)$, et bijective de réciproque g. Il s'agit de démontrer que g est injective de V dans $g(V)$.

La relation $g(y_1) = g(y_2)$ implique

$$\|y_1 - y_2\| = \|w(y_1) - w(y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|,$$

donc $y_1 = y_2$ car $k < 1$. Par suite, g est l'homéomorphisme de $W = f(U)$ sur U, réciproque de f. En outre, $W = g^{-1}(U)$ est ouvert dans F. Enfin, on a $0 \in W$, car cette condition est équivalente à $g(0) \in U$ et ceci signifie $\|w(0)\| < \alpha$ qui est équivalent à $\|w(0)\| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$

3 Théorèmes d'existences.

Théorème 4 (Théorème des fonctions implicites.)
Soient E,F,G des espaces de Banach, A ouvert de $E \times F$, $f \in C^1(A, G)$.

Soit $(x_0, y_0) \in A$, tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que

$$T_0 := \partial_F f(x_0, y_0)$$

est un homéomorphisme linéaire (bijectif, continue, linéaire, de réciproque continue).

Alors, il existe un voisinage ouvert V de x_0, tel que pour tout U ouvert connexe inclu dans V, Il existe une unique application u continue telle que

$$u(x_0) = y_0\ ,$$

$$(x, u(x)) \in A$$

et

$$f(x, v(x)) = 0,\ \forall x \in U.$$

De plus : $u \in C^1(U)$ et

$$u'(x) = -(\partial_F f(x, u(x)))^{-1} \circ (\partial_E f(x, u(x)))$$

Preuve En notant T_0^{-1} l'homéomorphisme réciproque de T_0, on peut écrire $f(x,y) = 0$, sous la forme : $g(x,y) = y$ avec $g(x,y) := y - T_0^{-1}.f(x,y)$.

En appliquant à $\phi(x,y) \mapsto g(x_0+x, y_0+y) - y_0$ le théorème 1, on obtient l'existence une unique fonction u telle que $u(x) = \phi(x, u(x))$ soit

$$u(x) = g(x_0 + x, y_0 + u(x)) - y_0,$$

ou encore

$$u(x) = y_0 + u(x) - T_0^{-1}.f(x_0 + x, y_0 + u(x)) - y_0.$$

En simplifiant

$$0 = f(x_0 + x, y_0 + u(x)),$$

en posant $\tilde{u}(x) := u(x - x_0) - y_0$, définie de façon unique,

$$0 = f(x, \tilde{u}(x))$$

et $\tilde{u}(x_0) = -y_0$

Reste donc à voir que ϕ vérifie bien les hyppothèses de 1.

Il s'agit donc de trouver un voisinage W de $(0,0)$ suffisament petit pour que ϕ soit continue sur cet ouvert et

$$\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|,$$

$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in W$ pour $0 \leqslant k < 1$.

On a $T_0^{-1} \circ T_0 = 1$. On peut donc écrire

$$\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2) = T_0^{-1}.(\partial_F f(x_0, y_0).(y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))).$$

Puisque $f \in C^1(A)$:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2) - \partial_F f(x_0, y_0).(y_1 - y_2)\| \leqslant \varepsilon\|y_1 - y_2\|.$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon\|T_0^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}$ et

$$\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)\| \leqslant \varepsilon\|y_1 - y_2\|.$$

Ainsi le théorème s'applique.

Montrons ensuite l'unicité de la fonction u. i.e. que si $U \subset U_0$ est un voisinage ouvert *connexe* de x_0, u est l'unique application de U dans F telle que

$$u(x_0) = y_0,$$

$$(x, u(x)) \in A,$$

$$f(x, u(x)) = 0.$$

A cet égard, considérons une application v vérifiant ces trois conditions, et considérons $M \subset U$ avec $M := \{x \in U; u(x) = v(x)\}$. Montrons que cet ensemble est à la fois ouvert et fermé, puisque U est connexe et $(x_0, y_0) \in M$ alors $M = U$.

M est clairement fermé (la condition $u(x) = v(x)$ est fermée car u et v sont continues.)

Par hypothèse $x \mapsto \partial_F f(x, u(x))$ est continue dans U_0 donc on peut supposer que dans un voisinage $\tilde{U}$ de (x_0, y_0), $\partial_F f(x, u(x))$ est un homéomorphisme linéaire de F sur G pour $x \in \tilde{U}$. Soit $a \in M$, il existe un voisinage ouvert de a inclus dans U et un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de $b = u(a)$ tel que $u(x)$ soit la seule solution y de l'équation $f(x, y) = 0$ vérifiant $y \in \tilde{V}$. Mais comme v est continue au point a et que $v(a) = u(a)$, il existe un voisinage $W \subset \tilde{U}$ pour $x \in W$ tel que $v(x) \in \tilde{V}$ par unicité de la solution dans $\tilde{U}$, alors $\tilde{U}$ est un voisinage ouvert de a dans U. Ainsi M est ouvert.

Montrons que u est continûement différentiable dans U. Pour x et $x + s$ dans U, posons $t := u(x + s) - u(x)$. Par hyppothèse, $f(x + s, u(x) + t) = f(x + s, u(x + s)) = 0$ et t tend vers 0 quand s tend vers 0. Par suite, pour un x donné dans U, et pour tout $\delta > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\|s\| \leqslant r$ implique

$$\|f(x + s, u(x) + t) - f(x, u(x)) - S(x).s - T(x).t\| \leqslant \delta(\|s\| + \|t\|)$$

où $S(x) = \partial_E f(x, u(x))$ et $T(x) = \partial_F f(x, u(x))$. Ceci est équivalent (puisque $f(x + s, u(x) + t) = f(x, u(x)) = 0$) à

$$\|S(x).s + T(x).t\| \leqslant \delta(\|s\| + \|t\|)$$

et comme $T(x)$ est un homéomorphisme linéaire de F sur G, on déduit de la relation précédente

$$\|T^{-1}(x) \circ S(x)).s + t\| \leqslant \delta\|T^{-1}(x)\|(\|s\| + \|t\|) \tag{2}$$

Choisissons δ tel que $\delta\|T^{-1}(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$. Alors si on pose

$$a = 2\|T^{-1}(x) \circ S(x)\| + 1$$

on déduit de (2) que

$$\|t\| - \frac{a-1}{2}\|s\| \leqslant \frac{1}{2}(\|s\| + \|t\|)$$

ie $\|t\| \leqslant a\|s\|$, et par suite

$$\|t + (T^{-1}(x) \circ S(x)).s\| \leqslant \delta(a + 1)\|T^{-1}(x)\|.\|s\|$$

dès que $\|s\| \leqslant r$. Par définition de t, ceci prouve que u est différentiable au point x et a une dérivée donnée par

$$u'(x) = -(\partial_F f(x, u(x)))^{-1} \circ (\partial_E f(x, u(x)))$$

et est continue comme composée de fonctions continues.

Théorème 5 (Explicite dans le cas $\mathbb{R}^n$.)
$E = \mathbb{R}^m$, $F = G = \mathbb{R}^n$, des espaces de dimensions finies.

Soient f_i, n fonctions scalaires définies et continûment différentiables dans un voisinage $U \times V$ d'un point $(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in E \times F$, telles que $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et telles que

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right|_{(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)} \neq 0. \tag{3}$$

Alors il existe un voisinage ouvert $W_0 \subset U$ de $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ tel que, pour tout voisinage ouvert connexe $W \subset W_0$ de $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, il existe un système unique de n fonctions scalaires $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, définies et continues dans W et telles que $g_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) = b_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $(x_1, \ldots, x_m) \in W$. De plus $g_i \in C^1(W)$, et

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -B^{-1}A \tag{4}$$

où A (resp. B) est obtenue en remplaçant y_i dans la matrice Jacobienne $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{i,k}$ (resp. $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$).

Application. (Folium de Descarte.)
Soit $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

Le courbe C est localement le graphe d'une fonction de y en fontion de x sauf aux points $(0, 0)$ et $\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$. Néanmoins, au voisinage de $\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$ on peut localement voir C comme le graphe d'une fonction de x en fonctions de y.

D'abbord la fontion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe C^1 Ensuite on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3(b^2 - a)$: d'après le théorème des fonctions implicites , pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2^{\frac{2}{3}}\}$, il existe un voisinage ouvert U de ce point, une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ tels que

$$[x \in U\ ,\ y \in V \text{ et } (x, y) \in C] \Leftrightarrow [x \in U \text{ et } y = \varphi(x)]$$

Toutefois, on peut tout de même appliquer le théorème des fonctions implicites et exprimer x en fontion de y au point $\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) = 3.(2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) = 3.2^{\frac{1}{3}} \neq 0$$

En revanche, ce n'est pas la cas au point $(0,0)$ qui est un point double, car $Df(0,0) \equiv 0$.

La dérivée de la fonction φ au points au elle existe est donnée par

$$\varphi'(x) = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

En écrivant $y = \varphi(x)$ dans l'indentité $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, on obtient , en dérivant en x :

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$$

En particulier, la tangeante au point (a,b) a pour équation $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$

Par définition la tangeante de C au point (a,b) est la droite d'équation $y - b = \varphi'(a).(x - a)$. En replaçant $\varphi'(a)$ trouvé dans l'égalité précédente on trouve l'équation.

On obtient le dessin du folium de Descarte en paramétrisant la courbe par intersection avec la droite d'équation $y = t.x$ et en faisant parcourir $t \in]-\infty, +\infty[$.

En résolvant le système d'équations $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ et $y = tx$, on obtient en comptant deux fois $(0,0)$ et si $t \neq -1$,

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

On étudie les variations de $x(t)$ et $y(t)$:

t	$-\infty$			-1			0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		$+\infty$
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$2^{1/3}$	$\searrow$	0
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{1/3}$	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	0

(5)

Ce paramétrage permet également de trouver le comportement assymptotique en $y = -x$ lorsque x et y tendent vers $\pm\infty$.

En effet on a $x/y = t$. Et ainsi on déduit que $(x(t), y(t))$ a même comportement qu'un droite $x + y + c = 0$ et ensuite $c = 1$.

Théorème 6

Soient E, F, deux espaces de Banach, $x_0 \in E$, $V \subset E$ voisinage ouvert de x_0, f une application $C^1(V)$. Si $f'(x_0)$ est un homéomorphisme linéaire de E sur F, Alors il existe un voisinage ouvert $U \subset V$ contenant x_0, tel que la restriction de f à U soit un homéomorphisme de U dans un voisinage de $y_0 = f(x_0)$.

De plus, l'application réciproque de f est continûment différentiable.

Preuve On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction $h(x,y) := f(x) + y$.

Exemple : (Exemple simple d'application du théorème d'inversion locale.) *Soit*

$$f := \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, xy) \end{cases}.$$

f est un C^1-difféomorphisme au voisinage de chacun de ses points qui ne sont pas sur la droite $y = x$.

Preuve f est C^1 comme fonction polynomiale. Son jacobien est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y \neq 0 \text{ si } (x,y) \notin \{x = y\} \tag{6}$$

Donc f est bien un C^1-difféomorphisme local en dehors de la première bissectrice.

On peut également expliciter les ouverts maximaux tels que f restreinte à ces ouverts soit un C^1-difféomorphisme global. On explicite la réciproque de la fonction f : pour cela on se donne $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ et on résoud le système $f(x,y) = (s,p)$, et cela donnera des conditions sur x et y.

On résoud

$$x + y = s \text{ et } xy = p$$

d'inconnues x et y. i.e. x et y sont racines de

$$X^2 - sX + p = 0,$$

qui admet des solutions réelles si et seulement si $s^2 - 4p \geqslant 0$

Alors

$$f(\mathbb{R}^2) = \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } s^2 - 4p \geqslant 0\right\}.$$

et

$$(f(x,y) = (s,p) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = \left(\dfrac{s+\sqrt{\Delta}}{2}, \dfrac{s-\sqrt{\Delta}}{2}\right) \\ \text{ou bien} \\ (x,y) = \left(\dfrac{s-\sqrt{\Delta}}{2}, \dfrac{s+\sqrt{\Delta}}{2}\right) \end{cases}.$$

En divisant $\mathbb{R}^2 = \{x \geqslant y\} \cup \{x \leqslant y\}$, on a une unique solution sur chaque domaine :

$$(f(x,y) = (s,p)) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1\{x > y\} \to & \{s^2 - 4p > 0\} \\ f_2\{x < y\} \to & \{s^2 - 4p > 0\} \end{cases}.$$

Les applications f_1 et f_2 sont bijectives. Ainsi on a explicité deux ouverts maximaux $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{tels que } x > y\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{tels que } x < y\}$

Exemple : (Contre-exemple du théorème d'inversion local.)
Soit

$$f := \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \qquad (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy) := (u(x,y), v(x,y)) \end{cases}$$

En tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, f est un C^∞-difféomorphisme local.
f n'est pas un C^∞-difféomorphisme global.

Preuve f est clairement C^∞ comme fonction polynomiale.

Au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on écrit le déterminant Jacobien :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -2b & 2a \end{vmatrix} = 4(a^2+b^2) \neq 0 \text{ si } (a,b) \neq (0,0) \tag{7}$$

Donc, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de (a,b) et un voisinage V de $f(a,b)$ tel que f réalise un C^∞-difféomorphisme entre U et V.

Néanmoins, comme $f(x,y) = f(-x,-y)$, f n'est pas injective donc non bijective, ce qui pose un obstacle majeur à ce qu'elle soit un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

De plus on peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et écrire $f : z \mapsto z^2 := u(x,y) + iv(x,y)$ de $\mathbb{C} \setminus 0$ dans lui même. Et ainsi le jacobien correspond à $f'(z) = 2z$. L'obstacle à l'inversion globale étant la non-injectivité de f, on va restreindre l'ouvert de définition pour obtenir un difféomorphisme sur cet ouvert. Comme $f(z) = f(-z)$ on se restreint à $\tilde{U} = \{Re(z) > 0\}$ ou encore $\tilde{\tilde{U}} = \{Im(z) > 0\}$

Exemple : (Un autre contre-exemple.)
Soit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \ si\ x \neq 0 \\ \qquad 0 \ si\ x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$, mais f n'est pas inversible au voisinage de 0.

Preuve f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et on a $f(x) = x + O(x)$ au voisinage de 0, d'où $f'(0) = 1$. Mais il il y a trop d'oscillations dûes au sinus à proximité de 0.

En effet on a pour tout entier pair $k \geqslant 2$

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} < f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2k+1} + \frac{4}{(2k+1)^2}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur comprise entre $f\left(\frac{1}{k}\right)$ et $f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$ est atteinte deux fois sur l'intervalle $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$. Ainsi f ne peut être injective sur un quelconque voisinage de 0.

Nota : Le théorème d'inversion locale ne peut pas s'appliquer ici puisque f n'est pas C^1 au voisinage de 0.

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies n et m respectivement sur un corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), A une partie ouverte de E, f une application continûement différentiable de A dans F. Le rang de l'application linéaire $f'(x)$ en un point $x \in A$ est le plus grand nombre p tel qu'il existe un mineur non nul d'ordre p dans la matrice jacobienne de f en x. Par continuité des mineurs ($f \in C^1$) alors ce mineur maximal reste non nul dans un voisinage d'un point, disons x_0. Donc cette matrice est de rang au moins p dans un voisinage ouvert de x_0.

Théorème 7 (Théorème du "rang")
Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m, A un voisinage d'un point $a \in E$, f une application continûement différentiable de A dans F, telle que le rang de $f'(x)$ dans A soit un nombre constant p.

Alors, il existe :

Un voisinage ouvert $U \subset A$ de a, et un homéomorphisme u de U sur la boule unité dans K^n (notée B^n), qui est continuement différentiable, ainsi que l'homéomorphisme réciproque ;

Un voisinage ouvert V de $b = f(a)$, contenant $f(U)$, et un homéomorphisme v de la boule unité de K^m (notée B^m) sur V qui est continuement différentiable, ainsi que l'homéomorphisme réciproque ;

Tels que

$$f = v \circ f_0 \circ u$$

où f_0 est l'application $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ de B^n dans B^m.

Preuve On peut supposer $a = b = 0$ en remplaçant f par l'application $\tilde{f} : x \mapsto f(a + x) - b$.

Soit M le noyau de l'application linéaire $f'(0)$ qui est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n - p$, et soit N un supplémentaire de M dans E. Prenons comme base de E, $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n vecteurs de E tels que $c_1, \ldots, c_p$ soit une base de N, $c_{p+1}, \ldots, c_n$ une base de M, et posons $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ où les φ_i sont les formes linéaires coordonnées. Notons $x \mapsto G(x)$ l'application linéaire $x \mapsto \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ de E sur le sous-espace K^{n-p} de K^n engendré par les e_i d'indices $i > p$. Soit P l'image de E par l'application linéaire $f'(0)$. C'est un sous-espace de F de dimension p, ayant comme base les éléments $d_i = f'(0).c_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. On complète en une base de F : $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, et on pose $y := \sum_{j=1}^{m} \psi_j(x) d_j$ pour tout $y \in F$, où les ψ_i sont les formes linéaires coordonnées. Notons $y \mapsto H(y)$, l'application linéaire $y \mapsto \sum_{j=1}^{m} \psi_j(x)e_j$ de F sur le sous-espace K^p de K^n engendré par les e_i d'indices $i \leqslant p$.

Considérons maintenant l'application $x \mapsto g(x) = H(f(x)) + G(x)$ de A dans K^n, qui est C^1. On a en outre, par dérivation des applications composées et dérivation des applications linéaires : $g'(x).s = H(f'(x).s) + g(s)$ pour tout $s \in E$, donc $g'(0).c_i = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Par 6, il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset A$ de 0 tel que la restriction de g à U_0 soit un homéomorphisme de U_0 sur un voisinage ouvert de 0 dans K^n, et tel que l'homéomorphisme réciproque g^{-1} soit C^1 dans $g(U_0)$. Soit $r > 0$ tel que la boule $|x_i| < r$, $1 \leqslant i \leqslant n$ soit contenue dans $g(U_0)$ et soit U l'image réciproque de cette boule par g, qui est un voisinage ouvert de 0. L'application u sera la restriction de $x \mapsto \frac{1}{r}g(x)$ à U.

Le rang de $f'(x)$ est constant lorsque $x \in A$. Ceci implique que l'image de E par $f'(x)$, notée Im_x, est de dimension p pour tout $x \in A$. Mais on peut supposer que U_0 a été pris assez petit pour que $g'(x)$ soit une bijection linéaire de E sur K^n pour $x \in U_0$, car g est C^1. Comme on a $g'(x).s = H(f'(x).s)$ pour $s \in N$, la restriction de $f'(x)$ à N doit être une bijection de cet espace de dimension p sur Im_x sur K^p. Notons L_x la bijection de K^p sur Im_x, application réciproque de $f'(x)_{|N}$. On écrit alors $f'(x) = L_x \circ H \circ f'(x)$.

Considérons maintenant K^n comme le produit $E_1 \times E_2$ ou $E_1 = K^p$ et $E_2 = K^{n-p}$. On va démontrer que l'application $(z_1, z_2) \mapsto f_1(z_1, z_2) = f(u^{-1}(z_1, z_2))$ de B^n dans F est indépendante de z_2. i.e. que $\partial_{E_2} f_1(z_1, z_2) = 0$ dans B^n. Par définition on écrit $f(x) = f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x))$, d'où, par dérivation des applications composées :

$$rf'(x).t = \partial_{E_1} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)).H(f'(x).t) + \partial_{E_2} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)).G(t) \tag{9}$$

pour tout $t \in E$.

On en déduit :

$$\partial_{E_2} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)).G(t) = S_x.H(f'(x).t)$$

en posant $S_x = rL_x - \partial_{E_1} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x))$, qui est une application linéaire de E_1 dans F. On va démontrer que $S_x = 0$, $\forall x \in U_0$. En effet, si $t \in N$, on a $G(t) = 0$ par définition, $S_x.H(f'(x).t) = 0$ d'après 9. De plus $t \mapsto H(f'(x).t) = g'(x).t$ est une bijection de N sur E_1 pour $x \in U_0$, et donc $S_x = 0$. Par 9 on tire que $\partial_{E_2} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)).G(t) = 0$ pour tout $t \in E$. Comme G applique E sur E_2, donc par définition, $\partial_{E_2} f_1(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x))$ qui est une application linéaire de E_2 dans F, est nulle pour tout $x \in U_0$.

Et comme $x \mapsto (\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x))$ est un homéomorphisme de U_0 sur un ensemble ouvert contenant B^n, alors $\partial_{E_2} f_1(z_1, z_2) = 0$ dans B^n.

On écrit maintenant $f_1(z_1)$ à la place de $f_1(z_1, z_2)$. et $f \in C^1(E_1, F)$. On a alors $f(x) = f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x))\right)$ pour tout $x \in U$. Ou, en posant $f(x) = y$, $y = f_1\left(\frac{1}{r}H(y)\right)$, pour $y \in f(U)$.

Ainsi $y \mapsto \frac{1}{r}H(y)$ est un homéomorphisme de $f(U)$ sur $B^p \subset E_1$, réciproque de $z_1 \mapsto f_1(z_1)$.

Considérons, de la même façon que pour K^n, $K^m = E_1 \times E_3$, avec $E_3 = K^{m-p}$. Soit T la bijection linéaire de E_3 sur le supplémentaire Q de P dans F engendré par $d_{p+1}, \ldots, d_m$, qui applique la base canonique de K^{m-p} sur $d_{p+1}, \ldots, d_m$. Posons $v(z_1, z_3) = f_1(z_1) + T(z_3)$ pour $z_1 \in B^p$ et $z_3 \in B^{m-p}$, qui est C^1. Par définition, on $H(v(z_1, z_3)) = H(f_1(z_1)) = rz_1$. Ainsi la relation $v(z_1, z_3) = v(z'_1, z'_3)$ implique $z_1 = z'_1$ ce qui entraine $T(z_3) = T(z'_3)$, donc $z_3 = z'_3$. Ainsi v est injective. Le relation $S_x = 0$ nous donne, pour tout $z_1 \in B^p$, $f'_1(z_1) = rL_x$ où x est un point quelconque de U tel que $f(x) = f_1(z_1)$. Ainsi la dérivée de v au point (z_1, z_3) est donnée par $(t-1, t_3) \mapsto rL_x.t_1 + T(t_3)$. Mais comme la restriction de H à P_x est injective, P_x est un supplémentaire de Q dans F, donc $v'(z_1, z_2)$ est un homéomorphisme linéaire de K^m sur$F$. Pour tout point $(z_1, z_3) \in B^m$ il existe par suite un voisinage ouvert W de ce point dans B^m tel que la restriction de v à W soit un homéomorphisme de W sur une partie ouvert $v(W) \subset F$ par 6. Comme v est injective, c'est un homeomorphisme de B^m sur l'ensemble ouvert $V = v(B^m)$, dont l'inverse est $C^1(V)$.

Le relation $f = v \circ f_0 \circ u$ provient des définitions.

4 Applications à la géométrie différentielle.

4.1 Extrémas liés.

Théorème 8 (Le théorème des extrémas liés.)
Soient $f, g_1, \cdots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1, où U est un ouvert. On désigne par

$$\Gamma := \{x \in U \text{ tel que } g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extrémum relativement à Γ, en $a \in \Gamma$, et si les formes $dg_1(a), \cdots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe une unique suite de réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \cdots + \lambda_r dg_r(a)$$

Les λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve Soit $n = r + s$, et identifions $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$. On écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x, y) = (x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s)$ ou encore $a = (a_x, a_y)$, $a_x \in \mathbb{R}^r$, $a_y \in \mathbb{R}^s$.

On a nécessairement $r \leqslant n$ car les formes linéaires $dg_i(a)$ forment une famille libre et la dimension du dual de $\mathbb{R}^n$ est n. Par ailleurs si $r = n$ le théorème est vérifié car on a alors que les $dg_i(a)$ formant une famille libre, ils forment une base de $\mathbb{R}^{n*}$.

On peut donc supposer que $s \leqslant n - 1$, c'est à dire $r \geqslant 1$.

Les formes linéaires $(dg_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une famille libre. La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_r} & \frac{\partial g_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial y_s} \end{pmatrix} \tag{10}$$

est de rang s.

On peut donc en extraire une sous matrice $s \times s$ inversible.

Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s}(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial y_s}(a) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

D'après le théorème des fonctions implicites on peut trouver un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de a_x dans $\mathbb{R}^r$ et un voisinage ouvert Ω de a dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_s) : \tilde{U} \to \mathbb{R}^s$ de classe C^1 tels que (en notant $g = (g_1, \cdots, g_s)$)

$$\Big[g(x, y) = 0 \text{ avec } x \in \tilde{U} \text{ et } (x, y) \in \Omega \Big] \Leftrightarrow y = g(x)$$

Ainsi sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma := \{z \text{ tels que } g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Posons $h(x) := f(x, \varphi(x))$. La fonction h admet un extrémum local en $x = a_x$.

Ainsi on peut écrire :

$$\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(a_y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a_x) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a).$$

En écrivant les dérivées partielles de $g(x, \varphi(x)) = 0$, on obtient :

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant s,\ \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a_x) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a).$$

Autrement dit, les r premiers vecteurs colonnes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_r} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_s} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_r} & \frac{\partial g_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial y_s} \end{pmatrix} \tag{12}$$

s'expriment en fonction des s derniers. Ainsi la rang de la matrice est égal à s.

Puisque l'on a $s+1$ lignes alors elles sont liées par une relation de dépendance linéaire.

Donc il existe $\mu_0, \cdots, \mu_s \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\mu_0 df(a) + \mu_1 dg_1(a) + \cdots + \mu_1 dg_s(a) = 0$$

Comme la famille $(dg_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre on a $\mu_0 \neq 0$ et donc on choisit :

$$\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$$

D'où

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \cdots + \lambda_r dg_r(a).$$

Application.
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $s > 0$.

Soit

$$f := \begin{cases} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto & x_1 \cdots x_n \end{cases}$$

Et $\Gamma := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i = s\}$

La fonction f étant continue sur le compact Γ, alors $f_{|\Gamma}$ admet un maximum global atteint en un point, disons $a \in \Gamma$

Si on note

$$g := \begin{cases} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto & x_1 + \cdots + x_n - s \end{cases}$$

alors on définit $\gamma := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } g(x) = 0\}$. Ainsi $a \in \Omega := \gamma \cap (\mathbb{R}^{+*})^n \subset \Gamma$ car $f(x) = 0$ dès qu'un des x_i est nul et $f(x) > 0$ si $x \in \gamma$

$f_{|\Omega}$ admet un extrémum global en a, et comme Ω est un ouvert de γ, $f_{|\gamma}$ atteint un extremum local en a. De plus, si $a \in \gamma$, alors $dg_a \neq 0$, on peut donc appliquer le théorème des extréma liés qui entraine l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_a = \lambda dg_a$.

On a donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda \text{ i.e. } \frac{f(a)}{a_i} = \lambda$$

Or $f(a) \neq 0$, on en déduit que tous les a_i sont égaux. Comme $\sum_{i=1}^{n} a_i = s$, on a $a_i = \frac{s}{n}$ pour tout i . La valeur du maxcimum recherché est donc $\left(\frac{s}{n}\right)^n$. Ou encore

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

.

Cette inégalité est appelée *inégalité arithmético-géométrique.*

4.2 Variétés de classe C^1

Définition (Variété.)
Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$, et d un entier naturel. On dit que V est lise en a, de dimension d, s'il existe un C^1-difféomorphisme F d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur le voisinage ouvert $F(U)$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en un sous espace vectoriel de dimension d, i.e. :

$$F(U \cap V) = V' \cap F(U) \text{ avec } V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse en chacun de ses points.

Théorème 9 (Théorème des sous-variétés.)
Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *V est lisse est a de dimension d.*
2. *Il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $n - d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que*

$$[x \in V \cap U] \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in U \text{ et} \\ f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{n-d}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

   et les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)$ sont indépendantes.

3. *Il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage U' de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n - d$ fonctions $g_i : U' \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que (après une éventuelle permutation de leur coordonnées :*

$$[x \in V \cap U] \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in U' \text{ et} \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ x_n = g_{n-d}(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

4. *Il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et n fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que l'application*

$$\varphi : u \mapsto (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$$

soit un homéomorphisme de Ω sur $U \cap V$, avec $a = \varphi(0)$, et dont $D\varphi(0)$ soit injective (de rang d).

Références

[1] Dieudonné, Jean Alexandre, *Les fondements de l'analyse moderne.*

[2] Rouvière, François, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

[3] Gourdon, Xavier, *Les maths en tête.*